Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1967

УДК 539.12.01

Г. Н. ШИКИН

К ВОПРОСУ О ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматриваются три типа нелинейных уравнений электромагнитного поля, соответствующие трем типам нелинейных членов: по функции поля произвольной степени, по производной от функции произвольной степени и смешанным нелинейным членом по функции и производной. Для каждого уравнения исследованы три типа решений, соответствующих трем типам аргументов, сводящих нелинейные уравнения в частных производных к обыкновенным нелинейным уравнениям. Исследуется возможность существования у рассматриваемых уравнений частицеподобных решений. Показано, что только нелинейные уравнения с нелинейным членом по функции могут иметь частицеподобные решения.

Нелинейные уравнения выводятся из вариационного принципа. В общем случае, когда функция Лагранжа имеет инварианты, содержащие кроме тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ 4-вектор A_μ, условие Лоренца $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ не выполняется. Лагранжев формализм вводится таким образом, что он не связан с условием Лоренца. Функция Лагранжа берется по образцу векторного поля. Инварианты поля строятся из следующих двух инвариантов:

$$I_0 = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2 \text{ и } I_1 = (A_\mu)^2.$$

Если функция Лагранжа содержит только инвариант I_0, то мы получаем уравнение для свободного поля. В общем случае L имеет вид

$$L = L_0 + L_1,$$

L_0 дает уравнение для свободного поля, L_1 дает нелинейные члены в уравнении поля. Рассматриваются уравнения, где L_I имеет вид

$$L_\mathrm{I} = \frac{\lambda}{2n} I_0^n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{I}$$

$$L_\mathrm{I} = \frac{\lambda}{2n} I_0 I_1^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{II}$$

$$L_{\rm I} = \frac{\lambda}{2n} I_1^n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{III}$$

где λ — константа при нелинейном члене.

Поскольку электромагнитное поле нейтральное, 4-вектор A_μ — действительная величина. Это ограничивает число возможных видов решений только действительными функциями. Рассматриваются решения, зависящие от трех типов аргументов, сводящих нелинейные уравнения в частных производных к обыкновенным нелинейным уравнениям: статические сферически симметричные решения, решения, зависящие от аргументов $\sqrt{r^2-t^2}$ и $\vec{k}\vec{x}=k_1x+k_2y+k_3z-\omega t$. Исследуется возможность существования у рассматриваемых уравнений частицеподобных решений. Частицеподобные решения дают конечные значения для компонентов 4-вектора энергии — импульса поля, они не имеют особенностей в нуле (а также в других точках) и монотонно убывают на бесконечности. В нелинейной теории поля не существует определенного критерия выбора функций Лагранжа, дающих нелинейные уравнения с частицеподобными решениями. Путем изучения решений нелинейных уравнений поля можно указать вид функций Лагранжа, дающих соответствующие уравнения.

Нелинейное уравнение электромагнитного поля с $L_{\rm I}$(III) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \lambda\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma}\right)^{2n-2} \cdot \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right\} = 0,$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Поскольку все компоненты A_μ удовлетворяют одному уравнению, ограничимся случаем, когда для всех A_μ выбираются одни и те же начальные условия и все A_μ имеют один и тот же вид. Тогда $(A_\mu)^2 = 2A^2$.

Для статических сферически симметричных решений уравнение (1) переходит в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} + \lambda 2^{n-1}\left(\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right)^{2n-1}\right]\right\} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial A(r)}{\partial r} + \lambda 2^{n-1}\left(\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right)^{2n-1} = -\frac{c}{r^2}.$$

Здесь $\frac{\partial A(r)}{\partial r}$ явно через r не выражается, но можно исследовать поведение $\frac{\partial A(r)}{\partial r}$ при $r\to\infty$ и $r\to 0$. Так как решение убывающее, то при $r\to\infty$ $\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{c}{r^2}$ и $A(r) = \frac{c}{r}$, т. е. на бесконечности, получаем кулоновский потенциал. При $r\to 0$ и $c\neq 0$ $\frac{\partial A}{\partial r}\to -\infty$.

Напряженность электрического поля $E = -\frac{\partial A}{\partial r}$ при $r\to 0$ стремится к бесконечности. Отсюда следует, что уравнение не имеет статических сферически симметричных частицеподобных решений.

Уравнение с L_{I} (II) принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2} + \frac{\lambda}{n}\left\{\left(\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2}\right)\cdot(A_\mu)^{2n} + n\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)^2 (A_\mu)^{2n-1}\right\} = 0. \qquad (2)$$

Для статического сферически симметричного решения оно приводится к уравнению

$$A''(r) + \frac{2}{r}A'(r) + \frac{\lambda 2^n A^{2n-1}(r)(A'(r))^2}{1+\frac{\lambda}{n}2^n A^{2n}(r)} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) делением на $A'(r)$ приводится к уравнению в полных дифференциалах:

$$\frac{d(A')}{A'} + \frac{2}{r}dr + \frac{\lambda 2^n}{2n}\cdot\frac{d(A)^{2n}}{1+\frac{\lambda}{n}2^n A^{2n}} = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет общий интеграл

$$\int\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}\cdot 2^n\cdot A^{2n}}\,dA = -\frac{c_1}{r} + c_2. \qquad (5)$$

Интеграл в (5) выражается через элементарные функции только для $n=1$, для остальных n сводится к эллиптическим интегралам. Общий интеграл для $n=1$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\left\{A\sqrt{1+2\lambda A^2} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\ln\left(A+\sqrt{\frac{1}{2\lambda}+A^2}\right)\right\} = -\frac{c_1}{r} + c_2. \qquad (6)$$

В (6) $A(r)$ явно через r не выражается. Исследуя соотношение (6) в особых точках, можно качественно описать поведение $A(r)$. При $r\to 0$ $A(r)\to -\infty$, при $r\to\infty$ $A(r)\to(-)0$, если $\frac{1}{2\sqrt{2\lambda}}\ln\sqrt{\frac{1}{2\lambda}} = c_2$ или к положительной или отрицательной постоянной величине, определяемой выбором c_2. Мы получили решение, имеющее особенность в нуле. Отсюда можно сделать вывод, что нелинейное уравнение электромагнитного поля с нелинейным членом по функции и производной не имеет статических частицеподобных решений.

Рассмотрим случай, когда потенциал A_μ является функцией аргумента $\eta = \sqrt{r^2-t^2}$. Из уравнения (2) получаем

$$A''(\eta) + \frac{3}{\eta}A'(\eta) + \frac{\lambda 2^n\cdot A^{2n-1}(\eta)\cdot(A'(\eta))^2}{1+\frac{\lambda}{n}\cdot 2^n\cdot A^{2n}(\eta)} = 0. \qquad (7)$$

Общий интеграл уравнения (7) имеет вид

$$\int\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}2^n A^{2n}}\,dA = -\frac{c_1}{(r^2-t^2)} + c_2.$$

Для $n=1$ получаем

$$\frac{1}{2}\left\{A\sqrt{1+2\lambda A^2}+\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\ln\left(A+\sqrt{\frac{1}{2\lambda}+A^2}\right)\right\}=-\frac{c_1}{(r^2-t^2)}+c_2.$$

В точке $\eta=r^2-t^2=0$ имеем $A(\eta)\to-\infty$.

Решение разрывно в точке $\eta=0$. Отсюда следует, что при $n=1$ не существует частицеподобных решений, зависящих от аргумента $\sqrt{r^2-t^2}$.

Рассмотрим случай, когда A_μ является функцией аргумента $\eta=\vec{k}\vec{x}=k_1x+k_2y+k_3z-\omega t$. Так же как и в предыдущих случаях, считаем, что все $A_\mu=A(\eta)$ выражаются одной функцией, так как удовлетворяют одному уравнению и одним и тем же начальным условиям. Из (2) получаем уравнение для $A(\eta)$

$$A''(\eta)+\frac{\lambda 2^n A^{2n-1}(\eta)(A'(\eta))^2}{1+\frac{\lambda}{n}2^nA^{2n}(\eta)}=0. \tag{8}$$

Для $n=1$ это уравнение имеет общий интеграл:

$$\frac{1}{2}\left\{A\sqrt{1+2\lambda A^2}+\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\ln\left(A+\sqrt{\frac{1}{2\lambda}+A^2}\right)\right\}=c_1\eta+c_2. \tag{9}$$

Из (9) при $\eta=0$ видно, что $A(\eta)$ есть конечная величина или нуль, если $\ln\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}=2\sqrt{2\lambda}\cdot c_2$, при $\eta\to\infty$ $A(\eta)\to\infty$, при $\eta\to-\infty$ $A(\eta)\to\infty$, т. е. не существует решений, конечных во всем пространстве. Отсюда следует, что для аргумента $\eta=\vec{k}\vec{x}$ инвариант типа II не дает уравнений с частицеподобными решениями.

Уравнение с L_1 (III) имеет вид

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu^2}+\lambda\cdot A_\mu^{2n-1}=0. \tag{10}$$

Для статического сферически симметричного случая $A_\mu=A(r)$ имеем уравнение

$$A''(r)+\frac{2}{r}A'(r)+\lambda 2^{n-1}A^{2n-1}(r)=0. \tag{11}$$

Сделаем замену переменных: $\sqrt{\lambda 2^{n-1}}\,r=\xi$, $A(r)=\Phi(\xi)$. Для $\Phi(\xi)$ получаем уравнение Эмдена — Фаулера

$$\Phi''(\xi)+\frac{2}{\xi}\Phi'(\xi)+\Phi^{2n-1}(\xi)=0.$$

Это уравнение для всех $n>2$ имеет частное точное решение:

$$\Phi(\xi)=c\xi^{-\mu},\ \text{где}\ \mu=\frac{2}{2n-2},\ c^{m-1}=\mu(1-\mu),\ \mu<1.$$

Это решение монотонно убывает на бесконечности и имеет особенность в нуле, т. е. не является частицеподобным. Для нетривиальных решений рассмотрим случаи конкретных значений n. Для случая $n=2$ имеем уравнение

$$\Phi''(\xi)+\frac{2}{\xi}\Phi'(\xi)+\Phi^3(\xi)=0. \tag{12}$$

Относительно этого уравнения существует теорема: уравнение вида (12) не имеет монотонных решений. Таким образом, для уравнения с нелинейным членом по функции третьей степени мы не имеем статических сферически симметричных частицеподобных решений. Рассмотрим случай $n=3$. Получаем уравнение вида

$$\Phi''(\xi)+\frac{2}{\xi}\Phi'(\xi)+\Phi^5(\xi)=0.$$

Это уравнение имеет точное решение. Подстановкой $\Phi(\xi)=\left(\frac{1}{\xi}\right)^{1/2} v\left(\ln\frac{1}{\xi}\right)$ оно сводится к уравнению

$$v''(t)-\frac{1}{4}v(t)+v^5(t)=0, \text{ где } t=\ln\frac{1}{\xi}.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int\frac{dv}{\sqrt{c_1+\frac{1}{4}v^2-\frac{v^6}{3}}}=t+c_2.$$

Если $c_1\neq 0$, то получаем эллиптический интеграл. Если $c_1=0$, то решение имеет вид

$$A(r)=\sqrt{\frac{3c}{4\lambda r^2+3c^2}}.$$

Полученное частицеподобное решение $A(r)$ монотонно убывает при $r=0, A(0)=\sqrt{\frac{1}{c}}$, $A'(r)/_{r=0}=0$ и имеет в нуле максимум. Для $n>3$ точных решений не получено. Получены асимптотические решения для $r\to\infty$ и $r\to 0$. Для $r\to\infty$ имеем

$$A(r)=\frac{a}{\sqrt{\lambda 2^{n-1}}\,r}-\frac{a^{2n-1}}{(2-n)(3-n)(2^{n-1}\lambda)^{\frac{2n-3}{2}}}\times\frac{1}{r^{2n-3}}. \qquad (13)$$

Из (13) видно, что при $r\to\infty$ получаются монотонно убывающие решения, поведение которых в основном определяется членом $\frac{1}{r}$.

Рассмотрим поведение решения вблизи нуля. Перейдем к функции $u(\eta)=\Phi(\xi)$, $\eta=\xi^2$. Получаем уравнения вида

$$4\xi^2u''+6u'+u^{2n-1}=0.$$

Для $\xi\to 0$ пренебрегаем членом, содержащим ξ^2, если $u(\xi^2)$ вместе с первой и второй производной конечны для $0\leqslant\xi$, $\xi\ll 1$. Тогда получаем уравнение вида

$$6u'+u^{2n-1}=0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$u^{2n}=\frac{1}{2n\left(\frac{1}{6}\xi^2+c\right)}.$$

Для $A(r)$ получаем решение вида

$$A(r) = \frac{1}{\left(\frac{2^{n-1} n\lambda}{3} r^2 + c\right)^{1/2n}}.$$

Получаем для всех n конечное в нуле решение

$$A(r)/_{r=0} = \frac{1}{(c)^{1/2n}},$$

причем $A'(r)/_{r=0}=0$, $A''(r)/_{r=0}<0$ и имеет в нуле максимум. Отсюда следует, что для всех $n \geqslant 3$ существуют статические сферически симметричные частицеподобные решения.

Рассмотрим случай, когда $A_\mu = A(r^2 - t^2)$, $r^2 - t^2 = \eta$. Для $A(\eta)$ при $n=2$ получаем уравнение

$$\eta A'' + 2A' + \frac{\lambda}{2} A^3 = 0.$$

Перейдем к новой переменной: $\Phi(\xi) = A(\eta)$, $\xi = \frac{\lambda}{2}\eta$. Для $\Phi(\xi)$ получаем уравнение

$$\Phi''(\xi) + \frac{2}{\xi}\Phi'(\xi) + \frac{\Phi^3(\xi)}{\xi} = 0. \tag{14}$$

Перейдем к новой функции

$$\Phi(\xi) = \left(\frac{1}{\xi}\right)^{1/2} v\left(\ln\frac{1}{\xi}\right), \ \ln\frac{1}{\xi} = t.$$

Уравнение (14) сводится к уравнению для $v(t)$

$$v'' - \frac{1}{4} v + v^3 = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{dv}{\sqrt{c_1 + \frac{1}{4} v^2 - \frac{1}{2} v^4}} = t + c_2.$$

Если $c_1 \neq 0$, то получаем эллиптический интеграл. Для $c_1 = 0$ решение имеет вид

$$A(r, t) = \frac{2c}{\lambda(r^2 - t^2) + c^2}.$$

Получили разрывное решение в точках $t^2 - r^2 = \frac{c^2}{\lambda}$.

Для остальных значений n точных решений не получено. Асимптотическое поведение решений не дает возможности в общем случае выяснить существование точек разрыва и поэтому не представляет интереса. Рассмотрим случай, когда $A_\mu = A(\eta)$, где $\eta = \vec{k}\vec{x}$.

Из (10) получаем $\pm\,\omega^2 A'' + \lambda 2^{n-1} \cdot A^{2n-1} = 0$;

$$\pm\,\omega^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \omega_0^2.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\pm \int \frac{dA}{\sqrt{c_1 \pm \frac{\lambda 2^{n-1}}{n\omega^2} A^{2n}}} = \eta + c_2.$$

Если $c_1 \neq 0$, то для всех $n \geqslant 2$ получаем эллиптический интеграл. Если начальные условия выбрать так, что $c_1 = 0$, то при $\omega^2 < 0$ получаем решение в виде

$$A^{n-1}(\eta) = \pm \frac{1}{\frac{(n-1)\sqrt{\lambda 2^{n-1}}}{\omega \sqrt{n}} (\eta + c_2)}.$$

Поскольку η меняется в интервале $(-\infty, \infty)$, то для всех η, удовлетворяющих соотношению $\eta = -c_2$, получаем точки разрыва, т. е. для этого аргумента при выбранных условиях не существует частицеподобных решений.

Из всех рассмотренных случаев следует вывод, что при введенных ограничениях только уравнения с нелинейным членом по функции имеют частицеподобные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, 35, 452, 1958.
2. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Физматгиз, 1959.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1954.

Поступила в редакцию
4. 11 1965 г.

Кафедра
теоретической физики