Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1967

УДК 533.951

Э. И. УРАЗАКОВ

ПРОЛЕТ ЦИРКУЛЯРНО ЗАРЯЖЕННОГО СГУСТКА ВДОЛЬ ОСИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА

Методом Винера—Хопфа [2] определено поле, возбуждаемое распределенным аксиально-симметричным заряженным сгустком, пролетающим вдоль оси полубесконечного круглого волновода с конечной проводимостью стенок. Найдены поля излучения при пролете сгустка у открытого конца и внутри волновода. Полученные результаты позволяют рассчитать силы, действующие на сгусток. Результаты справедливы и для релятивистских скоростей.

В работе [1] решена задача об излучении точечной заряженной частицы, пролетающей по оси полубесконечного круглого волновода с идеально проводящими стенками. В настоящей работе исследуется поле распределенного циркулярно-заряженного сгустка, пролетающего вдоль оси полубесконечного круглого волновода с конечной проводимостью стенок.

Постановка задачи

Рассмотрим равномерное движение аксиально-симметричного заряженного сгустка вдоль оси полубесконечного круглого волновода со стенками, имеющими конечную проводимость. Волновод расположен в области $z>0$ цилиндрической системы координат (ось волновода совмещена с осью z).

Полное поле (E) в такой задаче определяем как сумму полей поля равномерно движущегося сгустка в пустоте (E_n) и возбужденного поля на стенках волновода (E_b).

Решение задачи о полном поле сводится к нахождению возбужденного поля, которое определяется через заданное E_n.

Из симметрии задачи видно, что в волноводе будут возбуждаться волны типа E_0, для которых токи на поверхности волновода имеют только один компонент j_z, не зависящий от φ. Поля этих волн E_0 определяются единственным компонентом вектор-потенциала A_z

$$E_r = \frac{i}{k}\frac{\partial^2 Az}{\partial r \partial z},$$

$$E_z = \frac{i}{k}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z\right), \quad H_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \tag{1}$$

Вектор-потенциал A_z представим в виде, аналогично тому, как это сделано в [3]

$$A_z(r,z) = \frac{i\pi a}{c}\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\left\{\begin{array}{ll} I_0(vr)H_0^{(1)}(va) & \text{при } r<a \\ I_0(va)H_0^{(1)}(vr) & \text{при } r>a \end{array}\right\} e^{iwz}\,dw. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, например,

$$E_z(r,z) = -\frac{\pi a}{kc}\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v^2F(w)\left\{\begin{array}{ll} I_0(vr)H_0^{(1)}(va) & \text{при } r<a \\ I_0(va)H_0^{(1)}(vr) & \text{при } r>a \end{array}\right\} e^{iwz}\,dw. \quad (3)$$

В частности, на границе волновода

$$E_z(a,z) = -\frac{\sqrt{2\pi}}{kc}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\,L(w)\,e^{iwz}\,dw, \quad (4)$$

где

$$L(w) = \pi a v^2 I_0(va)\,H_0(va), \quad (5)$$

а $F(w)$ — Фурье-компонент по z плотности наведенного тока на стенках волновода.

Для нахождения неизвестной функции $F(w)$, а следовательно и $E_z(a,z)$, используются граничные условия: равенство нулю наведенного тока в области $z<0$ и приближенное граничное условие Леонтовича (4) на стенках волновода.

Оба условия записываются математически:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\,e^{iwz}\,dw \qquad \text{при } z<0 \quad (6)$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(w)\left[L(w) + \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega\mu}{i\sigma}}\right]e^{iwz}\,dw = -\frac{kc}{\sqrt{2\pi}}\,\Delta(\omega)\,e^{ihz} \qquad \text{при } z>0,$$

где по-прежнему $L(w) = \pi a v^2 I_0'(va)\,H_0(va)$ (см. приложение).

Решение задачи

Эта система интегральных уравнений (6) решается методом Винера — Хопфа [2], используемым в [1], но ядро $L^x(w) = L(w) + \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}$ уже выражается через другие вспомогательные функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi_1^*(wa) = \varphi_2^*(-wa),$$

$$\varphi_1^*(wa)\,\varphi_2^*(wa) = \varphi_1(wa)\,\varphi_2(wa) + \frac{\omega}{2\pi v}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}, \quad (7)$$

где $\varphi_1(wa)$, $\varphi_2(wa)$ вычислены в (3), используются в [1] и имеют вид

$$\varphi_1(w_1) = \sqrt{\pi(\varkappa + w_1)\,I_0(v_1)\,H_0^{(1)}(v_1)\prod_{m=1}^{n}\frac{\gamma_m + w_1}{\gamma_m - w_1}\,e^{1/2M(w_1)}}, \quad (8)$$

$$\varphi_2(w_1) = \varphi_1(-w_1),$$

где

$$w_1 = wa,\ \varkappa = ka,\ v_1 = \sqrt{\varkappa^2 - w_1^2},\ \gamma_m = \sqrt{\varkappa^2 - \nu_m^2},$$

ν_m — m — корень функции $I_0(x)$, $M(w_1) = -M(-w_1)$ — конечная функция при вещественных w_1.

Решение системы (6) заключается в нахождении собственных функций $\varphi_1^*(w_1)$, $\varphi_2^*(w_1)$. Для определения этих функций воспользуемся малостью изменения ядра $L(w)$.

В тех точках, где $L(w)$ — велико, ядро меняется незначительно за счет слагаемого $\frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}$, и в этих точках $\varphi_{1,2}^*(w) \cong \varphi_{1,2}(w)$. (Иначе говоря, предполагается, что форма поля в реальных волноводах совпадает с формой поля в волноводе с идеально проводящими стенками.)

Введение слагаемого $\frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}$ существенно сказывается в тех областях, где $L(w)$ мало и приводит к сдвигу корней уравнения $L(w) = 0$. Поэтому $\varphi_{1,2}(w)$ отличается от $\varphi_{1,2}(w)$ членами, зависящими явным образом от корней $L(w) = 0$. И при переходе от $\varphi_{1,2}(w)$ к $\varphi_{1,2}^*(w)$ останутся неизменными множители вида $\sqrt{\pi(\varkappa \pm w)}e^{\pm {}^1/_2 M(w_1)}$.

Найдем изменения корней уравнения $L(w) = 0$. Разложив в ряд Тейлора функцию $(av)^2 I_0(va) H_0^{(1)}(va) + \frac{\omega a}{2\pi^2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}$ вблизи точек ν_m и пренебрегая членами разложения, выше линейных, найдем, что равенство

$$(av)^2 I_0(va) H_0^{(1)}(va) + \frac{\omega a}{2\pi^2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}} = 0$$

будет выполняться при*

$$va \simeq \nu_m + \frac{\omega a}{2\pi^2 \nu_m^2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}\frac{(-1)}{I_0^1(\nu_m) H_0^{(0)}\nu_m}. \tag{9}$$

Соответственно w_m^1 примет значение

$$w_m^1 = \gamma_m + \frac{\omega a}{\pi^2 \gamma_m \nu_m}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}\frac{1}{I_0^1(\nu_m) H_0^{(1)}(\nu_m)}, \tag{10}$$

$$w_m^1 = \gamma_m + a\Lambda_m,$$

$$\Lambda_m = \frac{\omega}{\pi^2 \gamma_m \nu_m}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}\frac{1}{I_0^1(\nu_m) H_0^{(1)}\nu_m}.$$

Итак, чтобы получить $\varphi_{1,2}^*(w^1)$, нужно в выражении для $\varphi_1(w^1)$ заменить γ_m на $\gamma_m + a\Lambda_m$ и $I_0(va) H_0^{(1)}(va)$ на $I_0(va) H_0^{(1)}(va) + \frac{\omega}{2\pi^2 a v^2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}$.

---

* Пренебрежение в этом разложении квадратичными членами и членами более высокого порядка справедливо для случая реальных волноводов с большой (но конечной) проводимостью стенок. Например, для медного волновода квадратичный член меньше линейного $\sim 10^2$ раз.

Таким образом, собственные функции в данной задаче с конечной проводимостью стенок волновода имеют вид

$$\varphi_1^*(w^1) = \sqrt{\pi(\varkappa + w^1)\left[I_0(v^1 a) H_0^{(1)}(v) + \frac{\omega}{2\pi^2 a v^2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}\right]} \times$$

$$\times \sqrt{\prod_{m=1}^{n} \frac{\gamma_m + a\Lambda_m + w^1}{\gamma_m + a\Lambda_m - w^1}}\, e^{{}^1/_2 M(w^1)},$$

$$\varphi_2^*(w^2) = \sqrt{\pi(\varkappa - w^1)\left[I_0(v^1) H_0^{(1)}(v^1) + \frac{\omega}{2\pi^2 a v^2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}\right]} \times$$

$$\times \sqrt{\prod_{m=1}^{n} \frac{\gamma_m + a\Lambda_m - w^1}{\gamma_m + a\Lambda_m + w^1}}\, e^{-{}^1/_2 M(w^1)}. \tag{11}$$

Из выражения (11) видно, что $\varphi_1^*(w^1)$ и $\varphi_2^*(w^1)$ не имеют нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексного переменного w^1 и связаны соотношениями (7).

Зная собственные функции $\varphi_{1,2}^*(w)$ данной задачи, легко найти (аналогично (1)) решение $F^*(w)$ системы (5)

$$F^*(w) = \frac{c^*(\omega)}{\sqrt{k - w}\,(w - h)\,\varphi_2^*(wa)}, \tag{12}$$

$$C^*(w) = -\frac{kc}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta(\omega)}{2\pi i \sqrt{k + h}\,\varphi_1^*(ha)}, \tag{13}$$

где

$$\Delta(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{(1-\beta^2)}{\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, Q(\xi)\, e^{i\xi \frac{\omega}{h}\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\infty} b\, db\, B(b),$$

$$\begin{matrix} I_0(v_2 a\sqrt{1-\beta^2})\,H_0^{(1)}(v_2 b\sqrt{1-\beta^2}) & \text{при } a < b, \\ I_0(v_2 b\sqrt{1-\beta^2})\,H_0^{(1)}(v_2 a\sqrt{1+\beta^2}) & \text{при } a > b. \end{matrix} \tag{14}$$

$\beta = \frac{u}{c}$ (u — скорость сгустка вдоль положительной оси z), причем $Q(\xi)$, $B(b)$ — заданные распределения заряда в сгустке по оси z и радиусу в системе координат, где сгусток покоится, а $v_2 = i\frac{\omega}{u}$.

Для бесконечного тонкого кольца с зарядом q: $Q(\xi) = \delta(\xi)$ и $B(b) = q\delta(b - b_q)$, где b_q — радиус кольца.

Выражение (12) имеет полюс в точке $w = h$, который следует считать лежащим выше действительной оси и в нулях функции $\varphi_2^*(w)$, т. е. в точках плоскости $w_m^* \to w_m + a\Lambda_m$, незначительно отличающихся от v_n. Физически это соответствует тому, что поле в волноводе с большой проводимостью мало отличается от поля в волноводе с идеально проводящими стенками. Комплексность связана с активным затуханием волн, распространяющихся в волноводе с конечной проводимостью.

Вычисление полей и сил

Вектор-потенциал полей, наводимых вне волновода, определяется $F^*(w)$:

$$A_z(r, z, \omega) = \frac{i\pi a}{c}\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F^*(w)\left\{\begin{matrix} I_0(vr)H_0^{(1)}(va) & \text{при } r<a \\ I_0(va)H_0^{(1)}(vr) & \text{при } r>a \end{matrix}\right\} \quad (15)$$

Поля выражаются следующими формулами:

$$E_z(r, z, \omega) = \frac{i}{k}\left[\frac{\partial^2 Az(r, z, \omega)}{\partial z^2} + k^2 A_z(r, z, \omega)\right],$$

$$E_r(r, z, \omega) = \frac{i}{k}\frac{\partial^2 A_z(r, z, \omega)}{\partial r\,\partial z}, \quad H_\varphi(r, z, \omega) = -\frac{\partial A_z(r, z, \omega)}{\partial r}.$$

Все дальнейшие расчеты проводятся для случая волновода с конечной проводимостью стенок. Формулы для волновода с идеально проводящими стенками получаются из выведенных, полагая $\sigma^{-1}=0$.

Для вычисления интеграла (12) для случая $r<a$ необходимо знать поведение подынтегральной функции в верхней полуплоскости комплексного переменного w. Единственными особыми точками подынтегральной функции в верхней полуплоскости являются полюсы, расположенные в точках $w=h$ и в нулях $\varphi_2^*\ (w)$.

Таким образом, вычисление интеграла (12) при помощи теории вычетов дает

$$A_z(r, z, \omega) = -2\pi^2\sqrt{2\pi}\,\frac{a}{c}\,c_\omega^*\left\{\frac{I_0(v_{n=h}r)\,H_0^{(1)}(v_{n=h}a)\,e^{ihz}}{\sqrt{k-h}\,\varphi_2^*(ha)} \pm\right.$$

$$\left.\pm\sum_{m=1}^{n}\frac{I_0(\overset{*}{v}_m r)\,H_0^{(1)}(\overset{*}{v}_m a)\,e^{i\overset{*}{w}_m z}}{\sqrt{k-\overset{*}{w}_m}\,(\overset{*}{w}_m-h)\,[\varphi_2^*(\overset{*}{w}_m a)]^1}\right\}, \quad (16)$$

где $v_{n=h}=\sqrt{k^2-h^2}, \overset{*}{v}_m$ дается выражением (6), $\overset{*}{w}_m = w_m + \alpha\Lambda_m$ (см. формулу (10)).

Первый член в правой части (13) определяет поле, наводимое в бесконечном круглом волноводе; сумма по m дает излучение при пролете у открытого конца волновода.

Полные потери на излучение внутрь волновода при полете у открытого конца волновода можно найти по формуле

$$N = \int\limits_0^\infty N_\omega\,d\omega = 2\pi c\int\limits_0^a\int\limits_0^\infty E_{r\omega}H_{-\varphi\omega}r\,dr\,d\omega.$$

Спектральная плотность излучения N_ω при этом равна

$$N_\omega = \frac{8\pi^6}{k^2 c}a^4 c_\omega^* c_\omega^* \sum_{m=1}^{n}\frac{\overset{*}{w}_m(k+\overset{*}{w}_m)\,H_0^2(w_m a)}{(w_m+h)^2\left\{[\varphi_2^*(\overset{*}{w}_m a)^1\right\}^2}\,(I_1^2(\overset{*}{v}_m a) - I_0(\overset{*}{v}_m a)\,I_2(\overset{*}{v}_m a)\}, \quad (17)$$

где $C_{\pm\omega}^*$ даются выражениями (13).

Это выражение удовлетворяется при условии $hz \gg w_m z$ для значений m, по которым проводится суммирование. Физический смысл этого условия в том, что сечение волновода, для которого определяется поток излучаемой энергии, должно быть удалено от открытого конца волновода на расстояние, превышающее путь формирования излучаемых частот.

Для вычисления наведенного поля вне волновода перейдем к сферическим координатам R, θ, φ: $r = R\sin\theta$, $z = R\cos\theta$.

При $kR \sin\theta \gg 1$ в волновой зоне интеграл (15) при $r > a$ можно вычислить приближенно. Используем для этого метод перевала:

$$A_z(R, \theta, \varphi) = -i\frac{4\pi^2 a}{c}\frac{e^{ikR}}{R}C_\omega^* \frac{I_0(ka\sin\theta)}{\sqrt{k - k\cos\theta}\,(k\cos\theta - h)\,\varphi_2^*(ka\sin\theta)}. \quad (18)$$

Интенсивность излучения во все пространство при частоте ω будет

$$P_\omega \simeq ck^2 \int_\Omega \sin^2\theta\,|A_z(R, \theta, \varphi)|\,R^2\,d\Omega = \frac{32\pi^5}{c}(ka)^2 C_\omega^* C_{-\omega}^* \times \quad (19)$$

$$\times \int_0^\pi \frac{I_0^2(ka\sin\theta)\sin^3\theta}{(k - k\cos\theta)\ (k\cos\theta - h)}\ \frac{d\theta}{|\varphi_2^*(k\cos\theta)|^2}.$$

Из формул (17) и (18) при $\sigma \to \infty$ и (20) при $b_q \to 0$ получаются формулы (18) и (19) работы [1] и все следующие из них эффекты.

Рассмотрим частный случай пролета внутри волновода бесконечно тонкого заряженного образования.

Продольную силу трения (силу торможения), действующую на движущийся сгусток внутри волновода, можно разбить на два члена: член, отвечающий силе, действующей на сгусток в волноводе с идеально проводящими стенками, и на член, учитывающий конечную проводимость стенок. При подсчете оказывается, что первый член тождественно равен нулю. Физически это означает, что при движении заряженного сгустка внутри волновода с идеально проводящими стенками не возникает силы торможения вследствие отсутствия диссипации энергии на стенках.

Второй член в выражении силы (см. (20)) при движении сгустка со скоростью $u = p = \beta c$ и сила радиальной деформации (см. (21)) имеют вид

$$F_{zh} \cong \frac{2\sqrt{2}}{a^{5/2}}q^2 c\sqrt{\frac{\mu}{\sigma c}}\,\frac{\beta^{3/2}}{(1-\beta^2)^{3/4}}\int_0^\infty dx\sqrt{x}\,\frac{I_0^2\left(\frac{b_q}{a}q_x\right)}{I_0^2(x)}, \quad (20)$$

$$F_{rh} \cong \frac{2q^2}{a^2}\sqrt{1-\beta^2}\int_0^\infty dx\,xK_0(x)\,\frac{I_0\left(\frac{b_q}{a}x\right)I_1\left(\frac{b_q}{a}x\right)}{I_0(x)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{q^2 c}{a^{5/2}}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma c}}\,\frac{\beta^{3/2}}{(1-\beta^2)^{1/4}}\int_0^\infty dx\sqrt{x}\,\frac{I_0\left(\frac{b_q}{a}x\right)I_1\left(\frac{b_q}{a}x\right)}{I_0^2(x)}, \quad (21)$$

где q — полный заряд сгустка, a — радиус волновода, b_q — радиус циркулярного сгустка, I_0, I_1 — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков, K_0 — функция Мак-Дональда нулевого порядка. В формуле (21) первый член соответствует радиальной силе, действующей на сгусток в волноводе с идеально проводящими стенками; второй член учитывает конечную проводимость стенок. Интегралы в формулах (20) и (21) вычислены приближенно (с относительной точностью 1%) для определенных значений $\frac{bq}{a}$ и даны в таблице.

$\frac{b_q}{a}$	10^{-2}	10^{-1}	$5{,}10^{-1}$	$9{,}10^{-1}$	$99{,}10^{-2}$
$\int_0^\infty dx\sqrt{x}\,\frac{I_0^2\left(\frac{b_q}{a}x\right)}{I_0^2(x)}$	1,201	1,214	1,685	9,848	327,93
$\int_0^\infty dx\,xK_0(x)\,\frac{I_0\left(\frac{b_q}{a}x\right)I_1\left(\frac{b_q}{a}x\right)}{I_0(x)}$	$3{,}10^{-3}$	$3{,}10^{-2}$	0,228	1,854	55,08
$\int_0^\infty dx\sqrt{x}\,\frac{I_0\left(\frac{b_q}{a}x\right)I_1\left(\frac{b_q}{a}x\right)}{I_0^2(x)}$	$2{,}3{,}10^{-2}$	0,244	7,322	785,57	5075,30

ПРИЛОЖЕНИЕ

При учете конечной проводимости стенок ($\sigma=\mathrm{const}<\infty$) воспользуемся приближенным граничным условием Леонтовича. Это условие выводится в предположениях $\lambda_\mu \ll \lambda = \frac{c}{\omega}$ (λ_μ — «длина волны» в металле) и $\lambda_\mu < a$ (a — радиус кривизны стенок волновода).

Распределение плотности тока в глубь металла при скин-эффекте имеет вид

$$j(z) = \sigma E_{tg} e^{-\frac{z}{d}(1-i)},$$

где σ — проводимость, E_{tg} — тангенциальный компонент электрического поля, d — эффективная глубина проникновения поля в стенку волновода. При «сильном скин-эффекте», который имеет место в реальных волноводах, выполняется неравенство $d \ll a$. $\lambda_м$.

В случае малой глубины проникновения распределенный ток $j(z)$ можно заменить на поверхностный ток J:

$$J = \int_0^\infty j(z)\,dz = \sqrt{\frac{i\sigma}{\mu\omega}}\,E_{tg}.$$

Итак, граничное условие в предположении идеальной проводимости стенок волновода $E_{tg}=0$ (2) приобретает вид

$$E_{tg} - \sqrt{\frac{\mu\omega}{i\sigma}}\,J = 0. \tag{22}$$

Из (22) непосредственно следует второе уравнение системы (6).

Автор благодарит А. А. Переверзеву за программирование и приближенный расчет интегралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. ЖТФ, **34**, вып. 4, 1964.
2. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. М., ИЛ, 1962.
3. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. М., «Советское радио», 1963.
4. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Советское радио», 1957.

Поступила в редакцию
20. 12 1965 г.

НИИЯФ