Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1967

УДК 539.12.01

В. Б. ГОСТЕВ

МОДЕЛЬ ФИКСИРОВАННОГО ИСТОЧНИКА И МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Изложена задача о взаимодействии фиксированных квантованных фермионов с бозонами и полученное решение использовано для описания множественного рождения бозонов.

В работе рассматривается взаимодействие произвольного числа фиксированных (отсутствует отдача) квантованных фермионов с бозонами и полученные точные решения используются для описания множественного рождения бозонов.

В представлении взаимодействия матрица перехода подчиняется уравнению ($\hbar=c=1$)

$$i\frac{\partial S(t,\ t_0)}{\partial t}=HS(t,\ t_0) \tag{1}$$

с начальным условием

$$S(t_0,\ t_0)=1. \tag{2}$$

Гамильтониан взаимодействия возьмем в виде

$$H=g\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k a_k(h(\vec{r}_k,\ t)-\lambda), \tag{3}$$

где

$$h(\vec{r}_k,\ t)=L\varphi(\vec{r}_k,\ t), \tag{4}$$

L — линейный оператор, действующий на оператор скалярного бозонного поля $\varphi(\vec{r}_0 t)$, который удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона

$$(\square-\mu^2)\varphi(\vec{r}_0 t)=0$$

и может быть представлен в виде суммы операторов рождения и поглощения скалярного поля

$$\varphi(\vec{r}_0 t)=\varphi^+(\vec{r}_0 t)+\varphi^-(\vec{r}_0 t),$$

$a_k(\bar{a}_k)$ — операторы рождения (поглощения) фермиона в точке $\vec{r}_k$, подчиняющиеся правилам перестановки

$$[a_k, \bar{a}_l]_+ = \delta_{kl},$$

λ — постоянная перенормировки (возможно бесконечная), соответствующая постоянной перенормировки массы δm в квантовой электродинамике.

В дальнейшем будем пользоваться операторами, вводимыми путем замены

$$\frac{gh(\vec{r}_1 t)}{i} \to h(\vec{r}_1 t),$$

$$\frac{g\varphi(\vec{r}_1 t)}{i} \to \varphi(\vec{r}_1 t). \tag{5}$$

Ищем $S(t, t_0)$ в виде суммы частных матриц перехода [2]:

$$S(t,t_0) = \sum_{i,j,k} S^{i,j,k}(t,t_0).$$

$S^{i,j,k}$ описывает процесс с поглощением фиксированного числа i бозонов и k фермионов и испускания j бозонов и k фермионов, т. е.

$$S^{i,j,k} \sim N[(h^-)^i (h^+)^j \bar{a}^k a^k],$$

где $h_k^\pm = L\varphi^\pm(\vec{r}_k, t)$, N — знак нормального произведения операторов, $\sim$ — знак пропорциональности.

Из формул (1), (3) и (5) получаем систему зацепляющихся уравнений для $S^{i,j,k}$

$$\frac{\partial S^{i,j,k}}{\partial t} = \sum_{l=1}^{n} \{\bar{a}_l a_l h_l^+ (S_{0,0}^{i,j-1,k-1} + S_{0,1}^{i,j-1,k}) +$$

$$+ \bar{a}_l a_l h_l^- (S_{0,0}^{i-1,j,k-1} + S_{1,0}^{i,j+1,k-1} + S_{0,1}^{i-1,j,k} + S_{1,1}^{i,j+1,k}) -$$

$$- \lambda \bar{a}_l a_l (S_{0,0}^{i,j,k-1} + S_{0,1}^{i,j,k})\}, \tag{6}$$

где первый нижний индекс означает число бозонных сверток, а второй — число фермионных сверток между гамильтонианом и частной матрицей перехода.

Начальные условия для матриц перехода выводятся из условия (2) так же, как и в [3]:

$$S^{i,j,k}(t_0, t_0) = 0 \quad k > 0,$$

$$S^{0,0,0}(t_0, t_0) = 1, \tag{7}$$

$$S^{i,j,0}(t_0, t) = 0.$$

Соотношение

$$S^{0,0,0}(t_0, t) = 1,$$

вытекающее из системы (6) с условиями (7) и являющееся по существу следствием исключения антифермионов, приводит к нарушению унитарности матрицы перехода $S(t, t_0)$, но эта неунитарность, как показано в [3], слабо влияет на величины вероятностей.

Перенормировка осуществляется с помощью соотношения [3]

$$S^{0,0,1}(t_0,t) = 0. \tag{8}$$

Условия (7) и (8) позволяют однозначно решить систему (6) и определить постоянную λ.

После довольно громоздких вычислений находим общее решение системы (12):

$$S^{i,j,n} = M_n^{i,j} \prod_{l=1}^{n} \bar{a}_l \prod_{l=1}^{n} a_l,$$

$$M_n^{i,j} = (-1)^{E\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_l = 1 \\ i_1 < i_2 \dots < i_l}}^{i_1, i_2, \dots, i_l = n} (-1)^l \cdot N \times$$

$$\times \Big[\sum_{k_1, k_2, \dots, k_l = 0}^{k_1+k_2+\dots+k_l = j} \prod_{s=1}^{l} \frac{1}{k_s!} \Big(\int_{t_0}^{t} h_{i_s}^{+}(\tau)\, d\tau\Big)^{k_s} \times$$

$$\times \sum_{k_1, k_2, \dots, k_l = 0}^{k_1+k_2+\dots+k_l = i} \prod_{s=1}^{l} \frac{1}{k_s!} \Big(\int_{t^0}^{t} h_{i_s}^{-}(\tau)\, d\tau\Big)^{k_s} \Big] \times$$

$$\times \exp\Big(\int_{t_0}^{t} d\tau \sum_{q, r = i_1, i_2, \dots, i_l}^{q, r = l} h^{-}_{q}(\tau \int_{t_0}^{\tau} h_r^{+}(\zeta) d\zeta\Big) + K_n^{i,j},$$

$$K_n^{i,j} \begin{cases} 0 & i,\ j \neq 0,\ 0 \\ n-1 & i,\ j = 0,\ 0 \quad n = 4s+1,\ 4s+2\ , \\ -(n-1) & i,\ j = 0,\ 0 \quad n = 4s'\ 4s+3 \end{cases} \tag{9}$$

где s — целое, $E(x)$ — целая часть x, $\dot{h}^{-}(\tau)\, \dot{h}^{+}(\zeta)$ — свертка операторов $h^{-}(\tau)$ и $h^{+}(\zeta)$, безразлично хронологическая или обычная, так как всегда $\tau \geqslant \zeta$.

Постоянная перенормировки

$$\lambda = \int_{t_0}^{t} \dot{h}^{-}(t)\, \dot{h}^{+}(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

как и следовало ожидать, в окончательные формулы не входит. Решение системы (9) экспоненциальными множителями отличается от матрицы перехода, которую можно найти по теории возмущений в низшем приближении по g, и не может быть получено ни в каком приближении теории возмущений.

Структуру общих выражений (9) поясняют частные примеры.

$$n = 1,$$

$$S^{i,j,1} = \bar{a}_1 a_1 N_{+}^{\prime 1} P_{-}^{j1} P^{i},$$

$$_{\pm}{}^{e}P^{j} = \frac{1}{j!} \Big(\int_{t_0}^{t} d\tau h_e^{\pm}(\tau)\Big)^{j}, \tag{11}$$

$$S^{0,0,1} = 0.$$

Из-за применения перенормировки (8) однофермионная матрица перехода для нашей модели приводит к выражениям, точно соответствующим низшим неисчезающим приближениям теории возмущений. Но такой малоинтересный результат получается лишь в случае однофермионной задачи.

$$n = 2,$$

$$S^{i,j,2} = \bar{a}_1\bar{a}_2 a_1 a_2 M_2^{i,j},$$

$$M_2^{i,j} = -N\Big(\sum_{k_1,k_2=0}^{k_1+k_2=j} {}^1_+P^{k_1}\,{}^2_+P^{k_2}\cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{k_1+k_2=i} {}^1_-P^{k_1}\,{}^2_-P^{k_2}\Big)\times$$

$$\times \exp\int_{t_0}^{t} A_{12}(\tau)\,d\tau \qquad i,\ j \neq 0,\ 0, \tag{12}$$

$$M_2^{0,0} = \exp\int_{t_0}^{t} A_{12}(\tau)\,d(\tau) + 1,$$

где

$$A_{i,k}(\tau) = \dot{h}_i^-(\tau)\int_{t_0}^{\tau}\dot{h}_k^+(\xi)\,d\xi + \dot{h}_k^-(\tau)\int_{t_0}^{\tau}\dot{h}_i^+(\xi)\,d\xi.$$

$$n = 3,\ i = 0.$$

$$S^{0,j,3} = \bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 a_1 a_2 a_3 R^j,$$

$$R^j = -\sum_{k_1,k_2,k_3=0}^{k_1+k_2+k_3=j} {}^1_+P^{k_1}\,{}^2_+P^{k_2}\,{}^3_+P^{k_3}\exp\int_{t_0}^{t} B_{123}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\sum_{k_1,k_2=0}^{k_1+k_2=j}\Big({}^1_+P^{k_1}\,{}^2_+P^{k_2}\exp\int_{t_0}^{t} A_{12}(\tau)\,d\tau + {}^1_+P^{k_1}\,{}^3_+P^{k_2}\exp\int_{t_0}^{t} A_{13}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\,{}^2_+P^{k_1}\,{}^3_+P^{k_2}\exp\int_{t_0}^{t} A_{23}(\tau)\,d\tau\Big) - ({}^1_+P^{j} + {}^2_+P^{j} + {}^3_+P^{j}) \qquad j \neq 0.$$

$$R^0 = M_3^{0,0} = -\exp\int_{t_0}^{t} B_{123}(\tau)\,d\tau + \exp\int_{t_0}^{t} A_{12}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\exp\int_{t_0}^{t} A_{13}(\tau)\,d\tau + \exp\int_{t_0}^{t} A_{23}(\tau)\,d\tau - 2, \tag{13}$$

где

$$B_{123}(\tau) = A_{12}(\tau) + A_{13}(\tau) + A_{23}(\tau).$$

Приведенные формулы подчеркивают симметрию частных матриц перехода по бозонным переменным $(h_i^{\pm})$.

Если операторы $\bar{a}_i$, a_i подчинить правилам коммутации Бозе, то выражения для матриц перехода (9), (10), (11), (12), (13) не изменятся с точностью до знака.

Для использования полученных матриц перехода в конкретных расчетах вероятностей надо сделать замену, обратную (5), и совершить предельный переход $t_0 \to -\infty$, $t \to +\infty$.

Применим рассмотренную модель к исследованию множественного рождения бозонов при столкновении бозона с фермионом. Амплитуда вероятности рождения j бозонов при столкновении одного бозона с фермионом записывается по известным правилам [4] в виде

$$H_{1j} = \frac{(2\pi)^{3/2(j+1)}}{(j!)^{1/2}} \left\langle \Phi_0 \left| a_1 \prod_{i=1}^{j} \varphi^-(\vec{k}_i)\, S^{1,j,1}(\infty, -\infty)\, \varphi^+(\vec{k})\, \vec{a}_1 \right| \Phi_0 \right\rangle,$$

где $|\Phi_0\rangle$ — состояние вакуума свободных полей, $\varphi^\pm(\vec{k})$ — Фурье — образы $\varphi^\pm(\vec{r}, t)$:

$$\varphi^\pm(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{e^{\pm i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}}{(2\omega)^{-\frac{1}{2}}} \varphi^\pm(\vec{k}),$$

$$\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}.$$

Вероятность рождения j бозонов с произвольными значениями импульсов $\vec{k}_i$ [4]

$$W(j) = \int |H_{1j}|^2 \prod_{i=1}^{j} d^3 k_i$$

рассчитаем с помощью матрицы (11) для операторов L (см. (4)), соответствующих размазанному по импульсам и энергии прямому и градиентному [5] взаимодействию с формфакторами $f(\alpha, k^2)$, $b(\beta, \omega)$ (α, β — параметры формфакторов) и фиксированному в начале координат ($\vec{r}_1 = 0$) фермиону: для прямого взаимодействия

$$W(j) = \frac{g^2 |f(a, k^2)|^2 |b(\beta, \omega)|^2}{2\omega} \frac{g^{2j}}{j!} [I(\alpha, \beta)]^j,$$

$$I(\alpha, \beta) = \int d^3k \frac{|f(\alpha, k^2)|^2 |b(\beta, \omega)|^2}{2\omega},$$

для градиентного взаимодействия со средним спином фермиона $\vec{\sigma}$ (θ — угол между $\vec{\sigma}$ и $\vec{k}$).

$$W(j) = \frac{g^2 \cos^2\theta \vec{k}^2 \vec{\sigma}^2 |f(\alpha, k^2)|^2 |b(\beta, \omega)|^2}{2\omega} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} g |\vec{\sigma}|\right)^{2j}}{j!} \cdot [I_1(\alpha, \beta)]^j,$$

$$I_1(\alpha, \beta) = \int d^3k \frac{k^2 |f(\alpha, k^2)|^2 |b(\beta, \omega)|^2}{2\omega}.$$

Множественность $\bar{j}$ — наиболее вероятное число рождающихся бозонов — определим из условия [6]

$$\left.\frac{d \ln W(j, \alpha, \beta)}{dj}\right|_{j=\bar{j}} = 0.$$

С помощью формулы Стирлинга, пренебрегая $\frac{1}{2\bar{j}}$, находим, что $\bar{j} \sim Y(\alpha, \beta)$ и $j \sim Y_1(\alpha, \beta)$ соответственно для прямого и градиентного взаимодействия.

Для достаточно гладких формфакторов параметры α и β можно сопоставить с обрезающим импульсом k_0 и энергией ω_0, которые естественно связать релятивистским соотношением

$$\omega_0 = \sqrt{k_0^2 + \mu^2}.$$

Тогда оценка интегралов $Y(\alpha, \beta) \to I(k_0)$, $Y_1(\alpha, \beta) \to I_1(k_0)$ дает для множественности результат, асимптотически не зависящий от вида формфакторов при $k_0 \ll \mu$ и $k_0 \gg \mu$

$$\bar{j} \sim \begin{cases} k_0^3 \\ k_0^5 \end{cases} k_0 \ll \mu, \qquad \bar{j} \sim \begin{cases} \text{const} \\ k_0^2 \end{cases} k_0 \gg \mu, \tag{14}$$

где верхние строчки относятся к прямому, а нижние к градиентному взаимодействию. Формулы (14) были проверены для конкретных формфакторов (гауссовой экспоненты и «ступеньки»).

Для рассматриваемых взаимодействий с изотропными формфакторами амплитуда Il_{1j} не зависит от направления импульсов $\vec{k}_i$, т. е. в нашей модели распределение рождающихся бозонов изотропно.

Роль энергии налетающей частицы в нашей модели играет энергия обрезания ω_0, так как в отсутствие временной (энергетической) размазки $(b(\beta, \omega) \to 2\pi\delta(\omega))$ энергия всех налетающих и рождающихся бозонов стремится к нулю, что вызвано описанием фермионов с помощью пропагатора

$$\dot{a}\dot{\bar{a}} = 1.$$

Из формулы (14) следует, что в предложенной модели для множественности нет единой степенной зависимости от импульса (энергии) в различных интервалах импульса налетающей частицы. Полученные результаты для множественности при малых импульсах не противоречат результатам полевого рассмотрения множественного рождения в более реалистической модели [6], а только при малых импульсах для далеких периферических столкновений частиц рассмотренная модель, в силу принятых упрощений, может более или менее корректно описывать множественное рождение нерелятивистских бозонов.

Приношу глубокую благодарность В. И. Григорьеву за постоянное внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев В. И. ЖЭТФ, **32**, 146, 1957.
2. Григорьев В. И. ЖЭТФ, **30**, 873, 1956.
3. Вавилов Б. Т., Григорьев В. И. ЖЭТФ, **39**, 794, 1960.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
5. Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, т. II. М., ИЛ, 1957.
6. Вавилов Б. Т., Вердиев И. А., Гончарова Н. Г., Григорьев В. И., Меледин Г. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 46, 1962.

Поступила в редакцию
23. 4 1965 г.

Кафедра
квантовой теории