

Ф. Б. КОНЕВ, Ю. И. КУЗНЕЦОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

Для исследования нелинейной системы третьего порядка с запаздыванием предлагается метод траекторий корней совместно с принципом гармонического баланса. Выяснены условия применимости предлагаемой методики исследования.

Исследованию нелинейных систем второго порядка с запаздыванием посвящено ряд работ [1—3]. Этого нельзя сказать о системах с запаздыванием более высокого порядка.

В данной работе на примере системы третьего порядка показана возможность применения метода траекторий корней [4] совместно с принципом гармонического баланса [5, 6] для анализа нелинейных систем с запаздыванием, и выяснены условия, при которых возможен такой анализ. Методом траекторий корней исследуются устойчивость системы, условия существования одночастотного периодического режима, находится частота и амплитуда периодического режима и исследуется устойчивость этого режима. Если нелинейная система допускает эквивалентную линейризацию, то метод

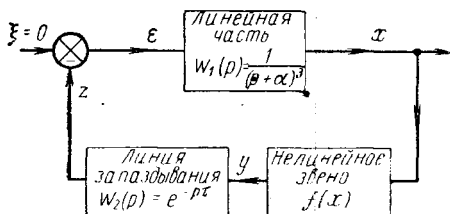


Рис. 1

применим для любого вида однозначной нечетно-симметричной характеристики нелинейного звена.

Рассмотрим нелинейную систему третьего порядка с «чистым» запаздыванием, структурная схема которой представлена на рис. 1. Такая система описывается нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x} + 3\alpha\dot{x} + 3\alpha^2x + \alpha^3x + f[x(t - \tau)] = 0, \quad (1)$$

$$\tau = \text{const.}$$

Если в системе, несмотря на запаздывание, может существовать одночастотный периодический режим и линейная часть обладает достаточно хорошими фильтрующими свойствами [7], то решение для переменной x можно искать в виде

$$x \approx a \cos \omega t. \quad (2)$$

Условия существования одночастотного режима будут получены ниже.

Если решение для x удовлетворяет (2), то, пользуясь принципом гармонического баланса, нелинейное звено с однозначной нечетно-симметричной характеристикой можно заменить эквивалентным линейным с коэффициентом передачи

$$q(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi, \quad \psi = \omega t \quad (3)$$

и представить линеаризованное характеристическое уравнение системы для переменной x в виде

$$(p + \alpha)^3 + q(a) e^{-p\tau} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть исследовано методом траекторий корней на плоскости комплексных частот $p = \delta + i\omega$ [8, 9].

Формально можно построить траектории корней уравнения (4), принимая q за свободный параметр, допускающий изменение в пределах от нуля до $+\infty$. Значению параметра $q=0$ соответствует трехкратная начальная точка $p = -\alpha$, расположенная на конечном расстоянии от начала координат. Кроме того, благодаря запаздыванию, имеется бесконечное число начальных точек, бесконечно удаленных от начала координат p -плоскости и расположенных слева от мнимой оси $i\omega$. Траектории имеют бесконечное число ветвей [8, 9]. На рис. 2 представлено несколько ближайших к началу координат ветвей траекторий для уравнения (4) при $\tau=1$ и $\alpha=1$.

Направление движения корней при возрастании параметра q показано стрелками на траекториях.

Траектории корней пересекают мнимую ось в точках

$$\begin{aligned} i\omega_1 &= \pm 0,91i, & q_{кр1} &= 2,48, \\ i\omega_2 &= \pm 5,28i, & \text{при } q_{кр2} &= 155,6, \\ i\omega_3 &= \pm 11,31i, & q_{кр3} &= 1466, \\ & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Критические значения параметра удовлетворяют неравенствам

$$0 < q_{кр1} < q_{кр2} < q_{кр3} < \dots \quad (6)$$

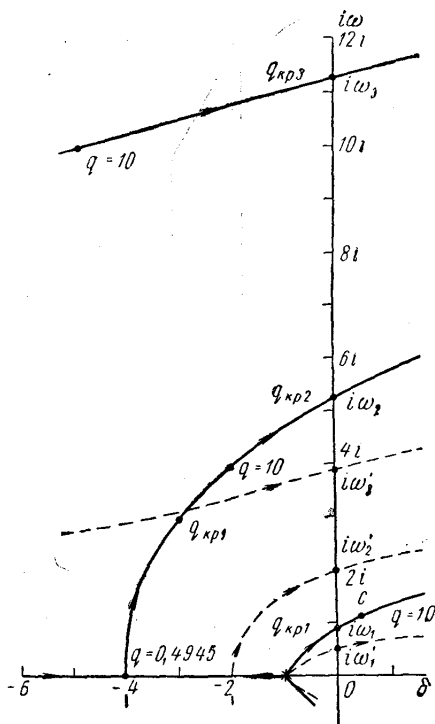


Рис. 2

Неравенства (6) выполняются при любых значениях τ и α . Таким образом, с ростом параметра от нуля на мнимую ось выходит сначала только одна пара комплексно-сопряженных корней $\pm i\omega_1$, соответствующая значению параметра $q_{кр1}$. При дальнейшем росте параметра на ось $i\omega$ выходит вторая пара комплексно-сопряженных корней $\pm i\omega_2$ при значении параметра $q_{кр2}$ и т. д.

Характер нелинейности накладывает ограничения на допустимые значения $q(a)$ и поэтому на траекториях для конкретной нелинейности необходимо выделить области допустимых значений корней.

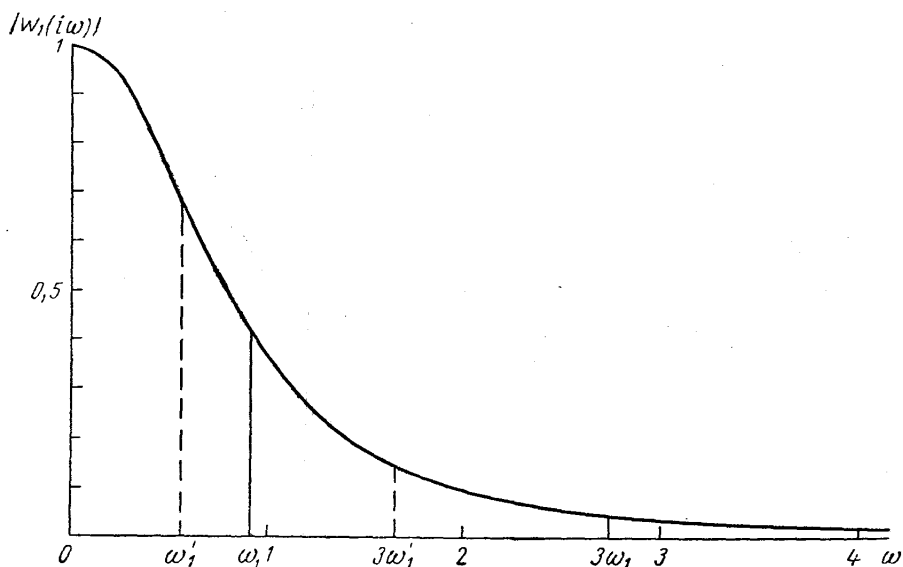


Рис. 3

Если области допустимых значений корней целиком лежат в левой полуплоскости, то положение равновесия системы устойчиво.

Таким образом, если

$$0 < q(a) < q_{кр1}, \quad (7)$$

то система устойчива. При выполнении условия

$$0 < q(a) < q_{кр2} \quad (8)$$

возможен выход на мнимую ось только одной пары комплексно-сопряженных корней. В этом случае систему с запаздыванием можно рассматривать как одночастотную, в которой возможен периодический режим частоты ω_1 .

Однако из-за наличия нелинейного звена в системе могут присутствовать гармоники основного колебания с частотами $3\omega_1, 5\omega_1, \dots$. Поэтому для того, чтобы решение для x в виде (2) было оправданным, необходимо потребовать, чтобы линейная часть системы обладала достаточно хорошими фильтровыми свойствами [6, 7], т. е.

$$|W_1(i\omega_1)| \gg |W(ik\omega_1)|, \quad k = 3, 5, 7, \dots \quad (9)$$

Следует отметить, что гармоники основного колебания не совпадают с частотами $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$, так как эти частоты не кратны основной частоте ω_1 .

Таким образом, при выполнении условий (8) и (9) решение для x в виде (2) обоснованно.

Заметим, что при увеличении времени запаздывания τ , частоты возможных периодических режимов уменьшаются. Для примера на рис. 2 пунктирными кривыми начерчены траектории корней уравнения (4) при $\tau=3$. В этом случае $\omega_1^1=0,55$. Фильтровые свойства линейной части системы накладывают ограничения на величину τ сверху, при которых решение для x можно искать в виде (2). В линейной части системы гармоники основной частоты ослабевают тем меньше, чем больше запаздывание τ^* .

На рис. 3 построена амплитудно-частотная характеристика линейной части системы, описываемой характеристическим уравнением (4). При $\tau=1$ гармоники основной частоты ослабевают гораздо лучше, чем при $\tau=3$.

Предположим далее, что в рассматриваемой системе третьего порядка ($\tau=1$) нелинейное звено описывается функцией вида

$$f(x) \begin{cases} kx & \text{при } |x| < b \\ c \operatorname{sign} x & \text{при } |x| \geq b \end{cases}. \quad (10)$$

В этом случае

$$q(a) = \begin{cases} k & \text{при } a < b \\ \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) & \text{при } a \geq b \end{cases}. \quad (11)$$

Так как $\max [q(a)] = q(0) = k$, то при $k < q_{кр1} = 2,48$ система устойчива, а при $q_{кр1} \leq k < q_{кр2} = 155,6$ в системе возможно одночастотное периодическое движение частоты $\omega_1 = 0,91$.

Пусть $k=10$ и $b=1$. График функции $q(a)$ для этих значений k и b представлен на рис. 4. При $a=0$ $q(a) = k = 10 > q_{кр1}$ и пара комплексно-сопряженных корней лежит в правой полуплоскости в точках cs^* (см. рис. 2), все остальные корни лежат слева от мнимой оси, поскольку $q(a) < q_{кр2}$. Положение равновесия устойчиво, и система возбуждается. С ростом амплитуды величина $q(a)$ уменьшается, а пара комплексно-сопряженных корней идет к оси $i\omega$. При $a=a_0=5$, когда $q(a) = q_{кр1}$, корни приходят на мнимую ось в точки $i\omega = \pm 0,91 i$. Величина a_0 легко определяется на рис. 4 или из формулы (11).

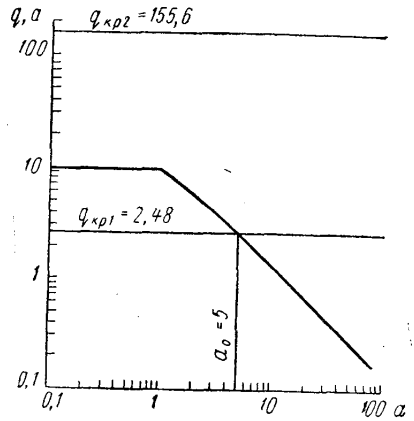


Рис. 4

Периодический режим частоты ω_1 и амплитуды $a_0=5$ будет устойчив. После изменения амплитуды a_0 на величину $\pm \Delta a$ комплексно-сопряженные корни со временем возвратятся на мнимую ось.

Таким образом, применение метода траекторий корней позволяет выяснить условия применимости одночастотного рассмотрения системы с запаздыванием и в сочетании с принципом гармонического баланса

* В каждом конкретном случае нетрудно установить, при каком значении τ решение для x уже нельзя искать в виде (2). В таком случае необходимо производить процедуру гармонической линеаризации с учетом гармоник [10].

позволяет исследовать устойчивость нелинейной системы с запаздыванием, находить частоту и амплитуду периодического одночастотного режима и исследовать устойчивость этого режима. Предлагаемая методика может быть с успехом применена для анализа нелинейных систем с запаздыванием и более высокого порядка.

В заключение авторы выражают благодарность проф. К. Ф. Теодорчику и доц. Г. А. Бендрикову за внимание и ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелик Г. ЖТФ, 9, вып. 5, 1939.
2. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. М., ОГИЗ, 1953.
3. Кисляков В. С. «Автоматика и телемеханика», 21, 4, 1960.
4. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
5. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, 1937.
6. Пальтов Е. П., Попов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
7. Айзерман М. А. «Автоматика и телемеханика», 14, 5, 1953.
8. Chu Y. Trans. AIEE, 71, pt. 2, 1952.
9. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. Применение метода траекторий корней к исследованию линейных систем с запаздыванием. Тезисы докладов на Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. г. Черновицы, 1965.
10. Попов Е. П. ДАН СССР, 98, № 3, 1954.

Поступила в редакцию
30. 1 1966 г.

Кафедра
физики колебаний