ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1967

УДК 521.1

Р. К. ЧОУДХРИ

СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ В КВАДРАТУРАХ И РЯДАХ

Проводится сравнение решений задачи двух неподвижных центров, полученных с помощью степенных рядов и в квадратурах в плоском случае.

В нашей статье [1] было дано решение проблемы двух неподвижных центров при помощи степенных рядов. Известно, что эта проблема допускает решение в квадратурах [2, 3]. В данной статье проводится сравнение указанных решений. Для простоты ограничимся рассмотрением плоского случая.

Решение, полученное в работе [1], может быть записано в виде

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu t^\nu, \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu t^\nu, \quad z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu t^\nu,$$

$$\rho_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu, \quad \rho_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu t^\nu,$$

$$\sigma_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu, \quad \sigma_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu t^\nu,$$

где коэффициенты α, β, γ, ... определяются рекуррентными соотношениями:

$$-2a_0c_1 = 3a_1 a_0^{-3/2},$$

$$-2b_0 cl_1 = 3b_1 b_0^{-3/2},$$

$$1\cdot 2\alpha_2 = k^2 a_0^{-3/2}(1-m)(1-\alpha_0) - k^2 m b_0^{-3/2}(1+\alpha_0),$$

$$1\cdot 2\beta_2 = -k^2 a_0^{-3/2}\beta_0 (1-m) - k^2 m \beta_0 b_0^{-3/2},$$

$$1\cdot 2\gamma_2 = -k^2 (1-m)\gamma_0 a_0^{-3/2} - k^2 m \gamma_0 b_0^{-3/2}.$$

$$a_2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - k^2 m b_0^{-3/2}\{(\alpha_0^2 - 1) + \beta_0^2 + \gamma_0^2\} - k^2(1-m)a_0^{-1/2},$$

$$b_2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - k^2 m a_0^{-3/2} \{(\alpha_0^2 - 1) + \beta_0^2 + \gamma_0^2\} - k^2 m b_0^{-1/2},$$

$$-4a_0 c_2 = C a_0^{-3/2} [\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - k^2 m \{b_0^{-3/2} (\alpha_0^2 - 1) + \beta_0^2 + \gamma_0^2) - a_0^{-1/2}\} - k^2 a_0^{-1/2}] -$$
$$- 30 a_0^{-5/2} [\alpha_1 (\alpha_0 - 1) + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1]^2,$$

$$-4b_0 d_2 = 6 b_0^{-3/2} [\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - k^2 (1-m) \{a_0^{-3/2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2) - a_0^{-1/2}\} -$$
$$- k^2 a_0^{-1/2}] - 30 b_0^{-5/2} [\alpha_1 (\alpha_0 + 1) + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1]^2.$$

$$(n+1)(n+2)\alpha_{n+2} = -k^2(1-m)\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu C_{n-\nu} - k^2 m \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu d_{n-\nu} +$$
$$+ k^2 (1-m) c_n - k^2 m d_n$$

$$(n+1)(n+2)\beta_{n+2} = -k^2(1-m)\sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu c_{n-\nu} - k^2 m \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu d_{n-\nu},$$

$$(n+1)(n+2)\gamma_{n+2} = -k^2(1-m)\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu c_{n-\nu} - k^2 m \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu d_{n-\nu},$$

$$a_n = (\alpha\alpha)_n + (\beta\beta)_n + (\gamma\gamma)_n - 2\alpha_n + \epsilon_n,$$
$$b_n = (\alpha\alpha)_n + (\beta\beta)_n + (\gamma\gamma)_n + 2\alpha_n + \epsilon_n.$$

В приведенных формулах $\in_n = 1$ для $n=0$ и $\in_n = 0$ для $n \neq 0$. Коэффициенты первых членов рядов определяются по следующим формулам:

$$-2na_0 c_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} (3n - \nu) c_\nu a_{n-\nu},$$

$$-2nb_0 dn = \sum_{\nu=0}^{n-1} (3n - \nu) d_\nu b_{n-\nu},$$

$$a_0 = (\alpha_0 - 1)^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2; \;\; b_0 = (\alpha_0 + 1)^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2,$$

$$c_0 = a_0^{-3/2}, \;\; d_0 = b_0^{-3/2},$$

$$a_1 = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1) - 2\alpha_1,$$

$$b_1 = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1) + 2\alpha_1.$$

Из этих соотношений следует, что если мы покажем тождественность величин a_0, b_0, c_0, d_0, α_2, β_2, γ_2 ... для обоих типов решений при одинаковых начальных условиях, то наше заключение будет справедливым и для всех остальных коэффициентов, выражающихся через указанные.

Для получения решения в квадратурах воспользуемся преобразованием Тиле. Положим

$$x = -\lambda\mu, \;\; \rho_1 = (\lambda + \mu)^2, \;\; \rho_2 = (\lambda - \mu)^2,$$
$$y = \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad \sigma_1 = (\lambda + \mu)^{-3}, \tag{1}$$
$$\sigma_2 = (\lambda - \mu)^{-3},$$

где $\lambda = c\operatorname{sh}v$, $\mu = c\operatorname{sh}u$. Тогда решение задачи определится из уравнений

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - 1)(h\lambda^2 + \lambda + \alpha)},$$
$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\mu^2 - 1)(h\mu^2 + \mu + \alpha)}, \qquad (2)$$

в которых h — постоянная энергии, α — постоянная интеграла площадей, m — масса одного из притягивающих центров, $1-m$ — масса второго притягивающего центра.

Предположим, что λ и μ могут быть разложены в ряды по возрастающим степеням времени t, и пусть

$$\lambda = \delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \delta_3 t^3 + \ldots,$$
$$\mu = \epsilon_0 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 t^2 + \epsilon_3 t^3 + \ldots. \qquad (3)$$

Подставляя эти ряды в выражения для x, y, ρ_1, ρ_2, ..., можно найти рекуррентные формулы для α_n, β_n, a_n, b_n, c_n, d_n. Для α_n получим

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots) = -(\delta_0 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \ldots)(\epsilon_0 + \epsilon_1 t + \epsilon_2 t^2 + \ldots) \qquad (4)$$

$$\alpha_0 = -\epsilon_0\delta_0,$$
$$\alpha_1 = -(\epsilon_0\delta_1 + \epsilon_1\delta_0),$$
$$\alpha_2 = (\epsilon_0\delta_2 + \epsilon_1\delta_1 + \epsilon_2\delta_0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n = -\sum_{\nu=0}^{n}\epsilon_\nu\delta_{n-\nu}.$$

Подобные формулы могут быть написаны и для β и γ. Ясно, что

$$a_0^{-3/2} = (\delta_0 + \epsilon_0)^{-3/2}, \quad b_0 = (\delta_0 - \epsilon_0)^{-3/2},$$

$$\alpha_2 = \frac{k^2 m(1-m)(\delta_0 - \epsilon_0)^3(1 + \epsilon_0\delta_0) - k^2 m(\delta_0 + \epsilon_0)^3(1 - \epsilon_0\delta_0)}{12(\delta_0^2 - \epsilon_0^2)^3}.$$

Отсюда

$$h = \frac{1}{2}(\delta_0^2 - \epsilon_0^2)\left[\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2 - 1} + \frac{\epsilon_1^2}{1 - \epsilon_0^2}\right] - \frac{1}{\delta_0^2 - \epsilon_0^2}[k^2\delta_0 - k_2(1 - 2m)\epsilon_0]. \qquad (5)$$

Для вычисления α_2 при помощи формул (1) необходимо найти ϵ_2 и δ_2.

Возводя уравнения (2) в квадрат, получим

$$(\lambda^2 - \mu^2)^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = 2(\lambda^2 - 1)(h\lambda^2 + \lambda + \alpha),$$
$$(\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = 2(\mu^2 - 1)(h\mu^2 + \mu + \alpha). \qquad (6)$$

Дифференцируя первое из уравнений (6), получаем

$$4(\lambda^2 - \mu^2)\left(\lambda\frac{d\lambda}{dt} - \mu\frac{d\mu}{dt}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + (\lambda^2 - \mu^2)\,2\,\frac{d\lambda}{dt}\frac{d^2\lambda}{dt^2} =$$
$$= 2(2\lambda)\frac{d\lambda}{dt}(h\lambda^2 + \lambda + \alpha) + 2(\lambda^2 - 1)(2h\lambda + 1).$$

Подставляя в полученное уравнение вместо λ и μ ряды $\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i t^i$, $\sum_{i=0}^{\infty}\epsilon_i t^i$ и приравнивая с обеих сторон постоянные члены, находим

$$\delta_2=\frac{\delta_0\delta_1^2}{2(\delta_0^2-1)}+\frac{k^2(\delta_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}+\frac{\delta_0(\delta_0^2-1)\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2-1}+\frac{\epsilon_1^2}{1-\epsilon_0^2}\right)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}-$$

$$-\frac{\delta_0(\delta_0^2-1)\{k^2\delta_0-k^2\epsilon_0(1-2m)\}}{(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3}-\frac{\delta_1(\delta_0\delta_1-\epsilon_0\epsilon_1)}{\delta_0^2-\epsilon_0^2}.$$

Аналогично:

$$\epsilon_2=\frac{\epsilon_0(\epsilon_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2-1}+\frac{\epsilon_1^2}{1-\epsilon_0^2}\right)-$$

$$-\frac{\epsilon_0(\epsilon_0^2-1)}{(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}\{k^2\delta_0-k^2(1-2m)\,\epsilon_0\}+\frac{\epsilon_1^2\epsilon_0}{2(\epsilon_0-1)}-\frac{\epsilon_1(\delta_0\delta_1-\epsilon_0\epsilon_1)}{\delta_0^2-\epsilon_0^2}+$$

$$+\frac{k^2(1-2m)(\epsilon_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}.$$

Подставляя полученные для δ_2 и ϵ_2 выражения в формулу (4), определяющую α_2, получим

$$\alpha_2[\epsilon_0\delta_2+\epsilon_1\delta_1+\epsilon_2\delta_0].$$

$$\left[\epsilon_0\left\{\frac{\delta_0\delta_1^2}{2(\delta_0^2-1)}+\frac{k^2(\delta_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^2}+\frac{\delta_0(\delta_0^2-1)\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2-1}+\frac{\epsilon_1^2}{1-\epsilon_0^2}\right)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\delta_0(\delta_0^2-1)\{k^2\delta_0-k^2\epsilon_0(1-2m)\}}{(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3}\right\}+\epsilon_1\delta_1+\delta_0\left[\epsilon_1^2\epsilon_0-\frac{\epsilon_1(\delta_0\delta_1-\epsilon_0\epsilon_1)}{\delta_0^2-\epsilon_0^2}+\right.$$

$$+\frac{k^2(1-2m)(\epsilon_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}+\frac{\epsilon_0(\epsilon_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}\left(\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2-1}+\frac{\epsilon_1^2}{1-\epsilon_0^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{\epsilon_0(\epsilon_0^2-1)}{(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3}\{k^2\sigma_0-k^2(1-2m)\,\epsilon_0\}\right].$$

После упрощений получим окончательно уравнение

$$\alpha_2=-\left[\frac{k^2\epsilon_0(\delta_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}-\frac{\epsilon_0\delta_0(\delta_0^2-1)\{k^2\delta_0-k^2\epsilon_0(1-2m)}{(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{k^2(1-2m)\delta_0(\epsilon_0^2-1)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)}-\frac{\epsilon_0\delta_0(\epsilon_0^2-1)}{(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3}\{k^2\delta_0-k^2\epsilon_0(1-2m)\}\right]=$$

$$=\frac{k^2(1-2m)(\delta_0-\epsilon_0)^3(1+\epsilon_0\delta_0)-k^2m(\delta_0+\epsilon_0)^3(1-\epsilon_0\delta_0)}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3},$$

аналогичное (5).

Принимая во внимание соотношение

$$y^2=(\lambda^2-1)(1-\mu^2),\tag{7}$$

найдем β^2. Дифференцируя (7), получаем

$$y\frac{dy}{dt} = -(\lambda^2-1)\mu\frac{d\mu}{dt} + (1-\mu)^2\lambda\frac{d\lambda}{dt}, \tag{8}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dt^2} = -(\lambda^2-1)\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - (\lambda^2-1)\mu\frac{d^2\mu}{dt} - 4\lambda\mu\frac{d\lambda}{dt}\frac{d\mu}{dt} +$$
$$+(1-\mu^2)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + (1-\mu^2)\lambda\frac{d^2\lambda}{dt^2}. \tag{9}$$

Полагая

$$y = \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i t^i,\quad \lambda = \sum_{i=0}^{\infty}\delta_i t^i,\quad \mu = \sum_{i=0}^{\infty}\epsilon_i t^i,$$

подставим эти ряды в (7), (8) и (9). Приравнивая соответствующие коэффициенты, найдем

$$\beta_0^2 = (\delta_0^2-1)(1-\epsilon_0^2),$$

$$\beta_0\beta_1 = -(\delta_0^2-1)\epsilon_0\epsilon_1 - 2(\delta_0^2-1)\epsilon_0\epsilon_2 - 4\epsilon_0\delta_0\epsilon_1\delta_1 +$$
$$+(1-\epsilon_0^2)\delta_1^2 + 2(1-\epsilon_0^2)\delta_0\delta_2,$$

$$\beta_1^2 = \frac{\epsilon_0^2\epsilon_1^2(\delta_0^2-1)^2 + \delta_0^2\delta_1^2(1-\epsilon_0^2)^2 - 2\epsilon_0\epsilon_1\delta_0\delta_1(\delta_0^2-1)(1-\epsilon_0^2)}{(\delta_0^2-1)(1-\epsilon_0^2)} =$$

$$= \epsilon_0^2\epsilon_1^2\frac{\delta_0^2-1}{1-\epsilon_0^2} + \frac{\delta_0^2\delta_1^2(1-\epsilon_0^2)}{\delta_0^2-1} - 2\epsilon_0\epsilon_1\delta_0\delta_1.$$

Подставляя в выражение для β_2 значения β_1^2 и β_0, получим

$$\beta_2 = -\sqrt{(\delta_0^2-1)(1-\epsilon_0^2)}\left[\frac{k^2(1-m)(\delta_0-\epsilon_0)^3 + k^2m(\delta_0-\epsilon_0)^3}{2(\delta_0^2-\epsilon_0^2)^3}\right],$$

что совпадает с величиной β_2, полученной первым способом.

Принимая во внимание, что все другие коэффициенты выражаются через α_0, α_1, α_2, β_0, β_1, β_2, можно заключить о тождественности и всех других коэффициентов, полученных при помощи рядов и квадратур. Отсюда следует эквивалентность обоих решений. По-видимому, в ряде задач использование решений в виде рядов может оказаться более предпочтительным.

В заключение выражаю благодарность своему руководителю проф. Б. М. Шиголеву. Я признателен также В. Г. Демину и Дас Пурна Чандра за помощь в подготовке работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чоудхри Р. К. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1962.
2. Charlier C. L. Die Mechanik des Himmels, Bd. 1. Leipzig, 1902.
3. Демин В. Г. «Астрон. журн.», 37, вып. 6, 1960.

Поступила в редакцию
1. 2 1966 г.

Кафедра
астрофизики