Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1967

УДК 539.2.01:548

В. А. ГОЛОВКО

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН В КРИСТАЛЛЕ ПРИ УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К УСЛОВИЯМ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ, С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

На основе уравнения Власова рассматривается распространение установившихся волн в неограниченном одномерном кристалле в линейном приближении. Основное внимание уделено кристаллу, находящемуся в условиях, близких к условиям кристаллизации. Развит метод последовательного определения функции распределения. Найдена зависимость между частотой волны и волновым вектором, при этом особо рассмотрен случай брэгговского отражения.

В работах Власова кристаллическое состояние вещества рассматривается на основе уравнения для функции распределения $f(\vec{r},\vec{v},t)$ [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\nabla_{\vec{r}}f-\frac{1}{m}\nabla_{\vec{v}}f\nabla_{\vec{r}}\int\limits_{(\infty)}K(|\vec{r}-\vec{r}'|)f(\vec{r}',\vec{v}',t)\,d\vec{v}'d\vec{r}'=0, \tag{1}$$

где $K(|\vec{r}-\vec{r}'|)$ — потенциальная энергия взаимодействия между частицами, m — масса частицы. При определенных условиях это уравнение имеет не зависящее от времени решение, представляющее собой периодическое распределение в пространстве (кристалл).

В настоящей работе исследуется вопрос о распространении установившихся волн малой амплитуды в подобных неограниченных периодических структурах. Основное внимание уделяется кристаллу, находящемуся в условиях, близких к тем, при которых происходит кристаллизация. Это позволяет непосредственно сравнить качественные закономерности распространения волн в кристаллических и однородных средах, а также дает возможность выяснить малоисследованный вопрос, как происходят изменения в характере распространения волн при переходе вещества из однородного состояния в кристаллическое.

Функция распределения для кристалла

Рассмотрим предварительно не зависящие от времени решения уравнения (1). Это уравнение имеет решение $f=f_0(\vec{r},\vec{v})$, причем [1]

$$f_0(\vec{r},\vec{v})=F\left[\frac{m\vec{v}^2}{2}+V(\vec{r})\right], \tag{2}$$

где F — произвольная функция,

$$V(\vec{r}) = \int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r}-\vec{r}'|) f_0(\vec{r}', \vec{v})\, d\vec{v} d\vec{r}'. \qquad (3)$$

Проинтегрировав выражение (2) по $d\vec{v}$ и подставив (3), получаем нелинейное интегральное уравнение для плотности $\rho_0(\vec{r}) \equiv \int\limits_{(\infty)} f_0(\vec{r}, \vec{v})\, d\vec{v}$:

$$\rho_0(\vec{r}) = \int\limits_{(\infty)} F\left[\frac{m\vec{v}^2}{2} + \int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r}-\vec{r}'|)\rho_0(\vec{r}')\, d\vec{r}'\right] d\vec{v}. \qquad (4)$$

В работе [1] функция $f_0(\vec{r}, \vec{v})$ конкретизируется с помощью предположения о статистической независимости. В настоящей работе мы не будем конкретизировать эту функцию. Но в дальнейшем на f_0 будут наложены некоторые условия, позволяющие наиболее просто рассмотреть распространение волн в кристалле.

Найдем условие возникновения периодических решений уравнения (4). Это уравнение имеет решение $\rho_0 = \bar{\rho} = \mathrm{const}$, так как в этом случае правая часть (4) не зависит от $\vec{r}$. Будем искать решение уравнения (4) в виде $\rho_0(\vec{r}) = \bar{\rho} + \alpha\rho_1(\vec{r})$, где $|\alpha| \ll 1$. Разлагая подынтегральное выражение в ряд по α, в линейном приближении получаем

$$\rho_1(\vec{r}) + \lambda \int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r}-\vec{r}'|)\rho_1(\vec{r}')\, d\vec{r}' = 0, \qquad (5)$$

где

$$\lambda = -\int\limits_{(\infty)} \frac{dF\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)}{d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)}\, d\vec{v} = \frac{4\pi}{m}\int\limits_0^\infty F\left(\frac{mv^2}{2}\right) dv. \qquad (6)$$

Уравнение (5) имеет периодические решения типа $\rho_1(\vec{r}) = Ae^{i\vec{a}\vec{r}}$, если $1+\lambda\sigma_a = 0$, где $\sigma_a = \int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r}|)\, e^{i\vec{a}\vec{r}} d\vec{r}$. Данное условие обобщает критерий кристаллизации, полученный Власовым [1] в предположении, что $F\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right)$ представляет собой максвелловское распределение. Для максвелловского распределения $\lambda = \bar{\rho}/\vartheta$ (ϑ — температура). Заметим, что полученное выше условие может выполняться лишь в том случае, если $\sigma_a < 0$ (из (6) следует, что $\lambda > 0$, так как $F \geqslant 0$).

Уравнение (1) имеет также решения вида $f_0 = F\left[\frac{mv_x^2}{2} + V(x),\ v_y, v_z\right]$.

Плотность $\rho_0(x)$ удовлетворяет уравнению такого же типа, как и уравнение (4). В дальнейшем в целях простоты будем рассматривать именно этот случай, когда f_0 не зависит от y и z.

В условиях, близких к условиям кристаллизации, распределение в координатном пространстве мало отличается от равномерного. В этом случае

$$f_0(x, v_x) \equiv \int\limits_{(\infty)} f_0(x, \vec{v})\, dv_y dv_z = f_{00}(v_x) + \alpha f_{01}(x, v_x) + \alpha^2 f_{02}(x, v_x) + \ldots, \qquad (7)$$

$$\rho_0(x) = \bar{\rho} + \alpha\rho_1(x) + \alpha^2\rho_2(x) + \ldots.$$

где α — некоторый малый параметр.

Обозначив период рассматриваемой структуры $2\pi/a$, разложим f_{0j} и ρ_j в ряды Фурье:

$$f_{0j}(x, v_x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{(j)}(v_x)\, e^{inax},$$

$$\rho_j(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(j)} e^{inax}. \quad j = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Конкретный вид функций $\varphi_n^{(j)}(v_x)$ и $a_n^{(j)}$ можно найти, задав

$$F\left[\frac{mv_x^2}{2} + V(x), v_y, v_z\right].$$

Функция распределения и дисперсионное соотношение для волн в кристалле

Как уже отмечалось выше, будем рассматривать периодические структуры, пространственная плотность которых зависит только от одной координаты (например, x). Будем предполагать также, что волны распространяются вдоль оси x. Это позволит наиболее простым образом выяснить основные закономерности распространения волн. Проинтегрируем функцию распределения по несущественным переменным v_y и v_z. Получившаяся в результате функция $f(x, v_x, t)$ удовлетворяет уравнению (в дальнейшем вместо v_x везде будем писать v)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, f(x', v', t)\, dv' d\vec{r}' = 0. \tag{9}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$f(x, v, t) = f_0(x, v) + f_1(x, v, t),$$

где f_0 — функция распределения для кристалла, f_1 — малая добавка, вызываемая волной. Если подставить это выражение в уравнение (9) и пренебречь членом порядка f_1^2, то для f_1 получается линейное уравнение. Решение этого линейного уравнения, соответствующее установившимся волнам, ищем в виде

$$f_1(x, v, t) = h(x, v)\, e^{i\omega t}.$$

Используя выражения (7), получаем следующее уравнение для $h(x, v)$:

$$i\omega h + v\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{df_{00}}{dv}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, h(x', v')\, dv'\, d\vec{r}' -$$

$$-\frac{\alpha}{m}\frac{\partial f_{01}}{\partial v}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, h(x', v')\, dv' d\vec{r}' -$$

$$-\frac{\alpha}{m}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, \rho_1(x')\, d\vec{r}' -$$

$$-\frac{\alpha^2}{m}\frac{\partial f_{02}}{\partial v}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, h(x', v')\, dv' d\vec{r}' -$$

$$-\frac{\alpha^2}{m}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, \rho_2(x')\, d\vec{r}' - \ldots = 0 \tag{10}$$

Решение этого уравнения будем искать в форме разложения по α:

$$h(x, v) = h_0(x, v) + \alpha h_1(x, v) + \alpha^2 h_2(x, v) + \ldots \tag{11}$$

Необходимо также принять во внимание, что дисперсионное соотношение, связывающее частоту волны и волновой вектор, должно зависеть от параметров, характеризующих кристалл, а поэтому должно зависеть от α. Обычно в эксперименте задается частота, равная частоте источника волн. Мы же будем считать заданным волновой вектор. Это связано с тем, что волновой вектор сложным образом входит в решение уравнения (10), ввиду сложной зависимости этого уравнения от x. Частота же довольно просто входит в это уравнение. Поэтому с точки зрения решения уравнения (10) проще задать волновой вектор и искать частоту, с которой должен действовать источник для создания волны с заданным значением волнового вектора (здесь подразумевается, что источник находится на бесконечности). Частоту ω ищем в виде ряда

$$\omega = \omega_0 + \alpha\omega_1 + \alpha^2\omega_2 + \ldots \tag{12}$$

В нулевом приближении по α имеем

$$i\omega_0 h_0 + v\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{df_{00}}{dv}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, h_0(x', v')\, dv' d\vec{r}' = 0. \tag{13}$$

Это уравнение известно из теории распространения волн в однородных средах [1]. Его решение есть

$$h_0(x, v) = g(v)\, e^{-ikx}$$

$$g(v) = \frac{k}{m}\sigma_k \frac{df_{00}/dv}{kv - \omega_0}\,\delta\rho, \tag{14}$$

где $\delta\rho \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(v)\, dv$ — произвольный параметр, определяющий амплитуду волны. Частота ω_0 и волновой вектор k связаны посредством дисперсионного уравнения

$$\frac{k}{m}\sigma_k \int\limits_{(\infty)}^{+\infty} \frac{df_{00}/dv}{kv - \omega_0}\, dv = 1. \tag{15}$$

Для того чтобы интеграл в этом выражении существовал в обычном смысле, будем предполагать, что $df_{00}/dv = 0$ при $v = \omega_0/k$. Это предположение обсудим впоследствии.

Переходим к следующему приближению по α. Члены в уравнении (10), пропорциональные α, дают

$$i\omega_0 h_1 + v\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{m}\frac{df_{00}}{dv}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, h_1(x', v')\, dv' d\vec{r}' =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\partial f_{01}}{\partial v}\frac{d}{dx}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)\, h_0(x', v')\, dv' d\vec{r}' +$$

$$+ \frac{1}{m}\frac{\partial h_0}{\partial v}\frac{d}{\partial x}\int\limits_{(\infty)} K(|\vec{r} - \vec{r}'|)'\, \rho_1(x')\, d\vec{r}' - i\omega_1 h_0. \tag{16}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$h_1(x, v) = e^{-ikx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(v)\, e^{inax}. \tag{17}$$

Правую часть уравнения (16) преобразуем, используя выражения (8). После подстановки, приравнивая Фурье-компоненты правой и левой частей полученного выражения, находим систему уравнений для $b_n(v)$:

$$(\omega_0 - kv)\, b_0 + \frac{k}{m}\sigma_k \frac{df_{00}}{dv} \int_{-\infty}^{+\infty} b_0(v')\, dv' = -\frac{k}{m}\sigma_k \frac{d\varphi_0^{(1)}}{dv}\delta\rho - \omega_1 g,$$

$$[\omega_0 + (na - k)v]\, b_n - \frac{1}{m}(na - k)\sigma_{na-k}\frac{df_{00}}{dv}\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(v')\, dv' =$$

$$= -\frac{k}{m}\sigma_k \frac{d\varphi_n^{(1)}}{dv}\delta\rho + \frac{a}{m} n a_n^{(1)}\sigma_{na}\frac{dg}{dv}, \quad (n \neq 0). \tag{18}$$

Разделим первое из этих уравнений на $kv-\omega_0$ и проинтегрируем по v. Левая часть получившегося выражения будет равна нулю в силу дисперсионного уравнения (15). Приравнивая нулю правую часть, определяем ω_1:

$$\omega_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_0^{(1)}/dv}{\omega_0 - kv}\, dv \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_{c0}/dv'}{(kv' - \omega_0)^2}\, dv'\right]^{-1} \tag{19}$$

Будем предполагать, что $d\varphi_0^{(1)}/dv = 0$ и $d^2 f_{00}/dv^2 = 0$ при $v = \omega_0/k$; поэтому интегралы в выражении (19) существуют в обычном смысле.

Из первого уравнения (18) можно получить

$$b_0(v) = \frac{k}{m}\sigma_k\delta\rho\frac{d\varphi_0^{(1)}/dv}{kv - \omega_0} + \omega_1\frac{g}{kv - \omega_0} + Cg,$$

где C — произвольная постоянная.

Уравнения (18) при $n \neq 0$ решаются следующим образом. Разделим каждое из этих уравнений на $\omega_0 + (na-k)v$ соответственно и проинтегрируем по v:

$$\left[1 - \frac{1}{m}(na - k)\sigma_{na-k}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df_{c0}/dv}{\omega_0 + (na - k)v}\, dv\right]\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(v')\, dv' =$$

$$= -\frac{k}{m}\sigma_k\delta\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_n^{(1)}/dv}{\omega_0 + (na - k)v}\, dv + \frac{a}{m} n a_n^{(1)}\sigma_{na}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dg/dv}{\omega_0 + (na - k)v}\, dv. \tag{20}$$

Определим отсюда $\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(v)\, dv$, тогда из уравнений (18) можно найти $b_n(v)$. Для существования интегралов в соотношениях (20) потребуем, чтобы $df_{00}/dv = 0$, $d^2 f_{00}/dv^2 = 0$, $d\varphi_n^{(1)}/dv = 0$ при $v = v_n \equiv \omega_0/(k - na)$.

Несколько слов о сходимости ряда (17). Если $n\to\infty$, то коэффициент при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_n(v)dv$ в формуле (20) стремится к единице, так как $\sigma_{na-k}\to 0$. Поэтому при больших n получаем приближенную оценку

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_n(v)\,dv\right| \sim \left(\frac{1}{n}A + B\sigma_{na}\right)|a_n^{(1)}|$$

(A и B — величины, независящие от n). Таким образом, ряд (17), проинтегрированный по v, сходится, если сходятся ряды (8). Подобным образом можно убедиться в сходимости самого ряда (17).

Аналогичным образом находятся другие члены разложений (11) и (12). Так

$$\omega_2 = \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(v)}{kv-\omega_0}\,dv\right]^{-1}\left\{\frac{1}{m}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(la-k)\,\sigma_{la-k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_{-l}^{(1)}/dv}{kv-\omega_0}\,dv\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_l(v')\,dv' + \right.$$

$$+\frac{a}{m}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} la_l^{(1)}\sigma_{la}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{db_{-l}/dv}{kv-\omega_0}\,dv -$$

$$\left. -\frac{k}{m}\,\sigma_k\delta\rho\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_0^{(2)}/dv}{kv-\omega_0}\,dv - \omega_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_0(v)}{kv-\omega_0}\,dv\right\}.$$

Подставив $g(v)$, $b_n(v)$, ω_0, ω_1, можно выразить ω_2 через параметры кристалла и k ($\delta\rho$ при этом сокращается).

При решении уравнения (10) появляются интегралы от различных производных функций $f_{00}(v)$ и $\varphi_n^{(j)}(v)$, деленных на $v-v_n$. Эти интегралы не вызывают затруднений, если df_{00}/dv и $d\varphi_n^{(j)}/dv$ (а следовательно, df_0/dv) обращаются в нуль в некоторых малых окрестностях, содержащих точки $v=v_n$. В настоящей работе предполагается, что df_0/dv удовлетворяет этому условию. В остальном F может быть произвольна и близка к любой заданной функции. Если же это условие не выполняется, то требуется особое рассмотрение; подобная ситуация имеет место и при исследовании распространения волн в однородных средах [1, 2].

Брэгговское отражение

Результаты предыдущего раздела перестают быть верными, если коэффициент при $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_n(v)dv$ в выражении (20) обращается в нуль. Приняв во внимание дисперсионное уравнение (15), получим, что этот коэффициент равен нулю, если $na-k=k$. Соотношение $na=2k$ соответствует известному условию Брэгга.

Остановимся более подробно на этом случае. Найдем решение уравнения (10), если $k=a/2+\Delta k$, причем $\Delta k \ll k$. Аналогичный случай рассмотрен в работе [3] (но там исследуются уравнения других типов). Решение уравнения (13) будем искать в виде суммы прямой и отраженной волн (как это сделано в [3])

$$h_0(x, v) = g(v)\,e^{-ikx} + g_1(v)\,e^{ikx-2i\Delta kx}. \tag{21}$$

Это выражение не удовлетворяет уравнению (13), если $\Delta k \neq 0$. Но если использовать формулу (14) и положить

$$g_1(v) = \frac{k}{m} \sigma_k \frac{df_{00}/dv}{kv + \omega_0} \delta\rho_1, \quad \delta\rho_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(v)\, dv, \tag{22}$$

то выражение (21) будет удовлетворять уравнению (13) с точностью до членов порядка $\Delta k/k$. Следует заметить, что уравнение (15) не меняется при замене k на $-k$ в силу четности f_{00}; поэтому соотношение (22) не противоречит уравнению (15).

Обратимся к точному уравнению (10). Раньше мы решали его следующим образом. После подстановки в это уравнение разложений (11) и (12) оно разбивается на группы членов, пропорциональных различным степеням α. Мы приравнивали нулю каждую такую группу членов. Если же считать, что $h_0(x, v)$ определяется выражением (21), то члены, пропорциональные α^0, не обращаются в нуль, но они отличаются от нуля на малую величину порядка $\Delta k/k$. Перенесем эту величину в высшие приближения. Рассматривая высшие приближения, будем объединять члены, пропорциональные одинаковым степеням α и $\Delta k/k$. В этом случае уравнение (16) для $h_1(x, v)$ должно быть изменено добавлением к правой части члена

$$i \frac{\Delta k}{\alpha} \frac{\delta\rho_1}{m} G(v)\, e^{ikx - 2i\Delta kx},$$

где

$$G(v) = -2 \frac{df_{00}}{dv} \left(k \frac{d\sigma_k}{dk} + \frac{\omega_0 \sigma_k}{kv + \omega_0} \right).$$

Решение уравнения для $h_1(x, v)$ имеет вид

$$h_1(x, v) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{b}_n(v)\, e^{i(2n+1)kx - 2i(n+1)\Delta kx}.$$

Здесь учтено, что $a = 2(k - \Delta k)$. Определение функций $\widehat{b}_n(v)$ $(n \neq 0, -1)$ не представляет труда и производится аналогично тому, как описано выше. Рассмотрим уравнения для $\widehat{b}_0(v)$ и $\widehat{b}_{-1}(v)$. Малые члены, пропорциональные $\Delta k/k$ (но не $\Delta k/\alpha k$), следует отбросить (т. е. перенести в высшее приближение). В результате получаем

$$(\omega_0 - kv)\, \widehat{b}_{-1} + \frac{k}{m} \frac{df_{00}}{dv} \sigma_k \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{b}_{-1}(v')\, dv' =$$

$$= -\frac{k}{m} \sigma_k \delta\rho \frac{d\varphi_0^{(1)}}{dv} + \frac{k}{m} \sigma_k \delta\rho_1 \frac{d\varphi_{-1}^{(1)}}{dv} - \frac{a}{m} a_{-1}^{(1)} \frac{dg_1}{dv} - \omega_1 g,$$

$$(\omega_0 + kv)\, \widehat{b}_0 - \frac{k}{m} \frac{df_{00}}{dv} \sigma_k \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{b}_0(v')\, dv' =$$

$$= -\frac{k}{m}\sigma_k\delta\rho\frac{d\varphi_1^{(1)}}{dv} + \frac{k}{m}\sigma_k\delta\rho_1\frac{d\varphi_0^{(1)}}{dv} +$$

$$+ \frac{a}{m}a_1^{(1)}\sigma_a\frac{dg}{dv} + \frac{\Delta k}{\alpha}\frac{\delta\rho_1}{m}G - \omega_1 g_1.$$

Разделим первое уравнение на $kv-\omega_0$, второе — на $kv+\omega_0$ и полученные выражения проинтегрируем по v. Если учесть дисперсионное уравнение (15) и в некоторых интегралах сделать замену $v \to -v$, то получим два таких уравнения

$$(\omega_1 I_1 - I_2)\delta\rho - I_3\delta\rho_1 = 0,$$

$$I_3^*\delta\rho - \left(\omega_1 I_1 - I_2 + \frac{\Delta k}{\alpha k}I_4\right)\delta\rho_1 = 0. \quad (23)$$

Здесь учтено, что в силу действительности f_{01} и ρ_1 имеют место соотношения $\varphi_{-1}^{(1)} = [\varphi_1^{(1)}]^*$, $a_{-1}^{(1)} = [a_1^{(1)}]^*$, и введены обозначения

$$I_1 = \sigma_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_{00}/dv}{(kv-\omega_0)^2}dv, \quad I_2 = \sigma_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_0^{(1)}/dv}{\omega_0 - kv}dv,$$

$$I_3 = \sigma_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi_{-1}^{(1)}/dv}{kv-\omega_0}dv - \frac{a}{m}a_{-1}^{(1)}\sigma_a\sigma_k\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{d}{dv}\left(\frac{df_{00}/dv}{kv+\omega_0}\right)}{kv-\omega_0}dv,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(v)}{kv+\omega_0}dv.$$

Система однородных уравнений (23) относительно неизвестных $\delta\rho$ и $\delta\rho_1$ допускает отличные от нуля решения, если определитель этой системы равен нулю. Приравнивая нулю определитель, находим ω_1:

$$\omega_1 = \frac{I_2}{I_1} + \frac{-\frac{\Delta k}{\alpha k}I_4 \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\alpha k}\right)^2 I_4^2 + 4|I_3|^2}}{2I_1}.$$

Если $\Delta k/\alpha k \ll 1$, то одно из значений ω_1 (какое именно, зависит от знака Δk) совпадает с полученным в предыдущем разделе (19). Другое значение ω_1 в этом случае следует отбросить. В точке $k = a/2$ кривая зависимости ω от k терпит разрыв: при стремлении к этой точке слева частота стремится к одному значению (обозначим это значение ω'), при стремлении справа — к другому значению (которое обозначим ω''). Величина разрыва кривой $\omega = \omega(k)$ в этой точке равна

$$\omega'' - \omega' = 2\left|\frac{\alpha I_3}{I_1}\right|.$$

Одно из соотношений (23) позволяет определить связь между $\delta\rho$ и $\delta\rho_1$. В частности, если $\Delta k = 0$, то $|\delta\rho| = |\delta\rho_1|$.

Таким образом, если среда кристаллизуется, то на дисперсионной кривой появляются разрывы при тех значениях волнового вектора, которые удовлетворяют условию Брэгга. Величина этих разрывов пропорциональна «амплитуде» кристалла ($\sim\alpha$). Волны с частотой, лежащей в пределах от ω' до ω'', распространяться не могут, так как такой частоте не соответствует ни одно действительное значение k (если нет других ветвей дисперсионной кривой). Ветвь дисперсионной кривой появляется при $\omega \geqslant \omega''$; из борновской теории кристалла следует лишь наличие ветви при $\omega \leqslant \omega'$ (отметим, что ветвь при $\omega \geqslant \omega''$ нельзя отождествлять с оптической ветвью, так как в настоящей работе предполагается наличие частиц лишь одного сорта).

В заключение благодарю проф. А. А. Власова за предложенную тему и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М., Гостехиздат, 1950.
2. Головко В. А. ЖЭТФ, 47, 1765, 1964.
3. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.

Поступила в редакцию
20. 2 1966 г.

Кафедра
теоретической физики