Если же воспользоваться экспериментальными кривыми Пашена [18] для равномерного распределения давления в промежутке, то для $U_s = 30$ *кв* получим $t'_{i_{N_2^+}} = 2{,}68 \cdot 10^{-6}$ *сек*.

Таким образом, $t_{i_{Mo^+}} : t_{i_{N_2^+}} : t'_{i_{N_2^+}} = 8{,}4 : 1{,}83 : 1$.

Время формирования τ при малых перенапряжениях $\Delta U / U_s$ близко к τ_{max} и, согласно (8), значительно превосходит t_i.

Полученные расчетом значения τ для N_2 и Mo находятся в удовлетворительном согласии с экспериментально наблюдаемыми значениями для времени формирования [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойм А. Б., Рейхрудель Э. М. ЖТФ, **31**, 1127, 1961.
2. Рейхрудель Э. М., Смирницкая Г. В. «Изв. вузов», радиофизика, **1**, 45, 1958; Рейхрудель Э. М., Смирницкая Г. В., Васильева М. Н. «Радиотехника и электроника», **5**, 662, 1960.
3. Рейхрудель Э. М., Бойм А. Б. Авт. свидетельство № 148150, с приоритетом от 20. VII 1961.
4. Fünfer E. Z. angew. Phys., **2**, 125, 1950; **5**, 426, 1953.
5. P. T. G. Flynn. Proc. Phys. Soc., **69**, 748, 1956.
6. Mc Veagh J. S. J. SMPTE, **70**, 10, 1961.
7. Кесаев И. Г. ЖТФ, **34**, 1482, 1964.
8. Плютто А. А., Рыжков В. Н., Капин А. Т. ЖЭТФ, **47**, 494, 1964.
9. Engel A. Y., Arnold K. W. Phys. Rev., **125**, 803, 1962.
10. Reece M. P. Proc. IRE, **110**, 793, 1963.
11. Тюлина М. А. ЖТФ, **35**, 511, 1965.
12. Ющенкова Н. И. Сб. «Проблемы энергетики». М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 343.
13. Narasimha R. J. Fluid Mech., **12**, 2, 1962.
14. Lewis T. J. Proc. Roy. Soc., **244A**, 166, 1958.
15. Robinson L. B. Phys. Rev., **117**, 1281, 1960.
16. Gryzinski M. Phys. Rev., **115**, 374, 1959.
17. Schade R. Z. Phys., **104**, 487, 1937; 108, 353, 1938.
18. Гусева Л. Г. «Тр. ВЭИ», вып. 63, № 7, 17, 1959.

Поступила в редакцию
4. 5 1966 г.

Кафедра
общей физики
для биологов

УДК 539.12.01

Г. Н. ШИКИН

К ВОПРОСУ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Рассматриваются нелинейные уравнения скалярного поля без массового члена с нелинейным членом по производной от полевой функции. Исследуется возможность существования нестационарных решений, дающих конечное значение для величин энергии и импульса поля — частицеподобных решений. Рассматривается четыре типа уравнений, получаемых из четырех типов функций Лагранжа: типа Борна—Инфельда, двух логарифмических функций типа Шредингера и типа $L = L_0 + L_{\mathrm{I}}$, где L_0 дает уравнение для свободного поля, а L_{I} дает нелинейные члены в уравнении поля. Для исследуемых уравнений комплексные поля имеют нестационарные частицеподобные решения, действительные поля не имеют.

Действительные поля. Рассмотрим уравнение, получаемое из функции Лагранжа типа Борна—Инфельда

$$L = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1 - \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)^2}\right).$$

При $\lambda \to 0$ L переходит в функцию Лагранжа для свободного поля:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2.$$

Получаемое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\left(1-\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\right)^2+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^2=0. \tag{1}$$

Рассматривается решение, когда $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(s)$, где $s = \sqrt{r^2 - t^2}$.

Из уравнения (1) получаем уравнение для $\varphi(s)$

$$\varphi''(s)+\frac{3}{s}\varphi'(s)+\frac{\frac{\lambda}{2}\varphi'(s)\frac{d}{ds}(\varphi'(s))^2}{1-\lambda(\varphi'(s))^2}=0. \tag{2}$$

Делением на $\varphi'(s)$ уравнение (2) приводится к уравнению в полных дифференциалах

$$\frac{d(\varphi')}{\varphi'}+\frac{3}{s}ds=-\frac{\frac{\lambda}{2}d(\varphi')^2}{1-\lambda(\varphi')^2}. \tag{3}$$

Интегрирование уравнения (3) дает

$$\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\lambda(\varphi')^2}}=\frac{c}{s^3},$$

где c — произвольная постоянная.

Отсюда получаем

$$\varphi'=\frac{c}{\sqrt{\lambda c^2+(r^2-t^2)^3}}. \tag{4}$$

Поскольку в тензор энергии-импульса входят только производные функции $\varphi(x, y, z, t)$, то достаточно рассматривать только поведение $\varphi'(s)$, так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_\mu}.$$

Из (4) видно, что функция $\varphi'(s)$ определена только для r и t, удовлетворяющих соотношению $(r^2-t^2)^3 \geqslant -\lambda c^2$, $\varphi'(s)\to\infty$ в точках, где $(r^2-t^2)^3=-\lambda c^2$. Отсюда следует, что уравнение (1) не имеет частицеподобных решений рассматриваемого типа. Заметим, что уравнение (1) имеет статические сферически симметричные частицеподобные решения.

Рассмотрим уравнение, получаемое из функции Лагранжа типа

$$L=-\frac{n}{\lambda}\ln\left(n-\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right),$$

где n — произвольная постоянная.

При $\lambda\to 0$, $L=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2$ полученное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\left(n-\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right)+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^2=0. \tag{5}$$

Для определения $\varphi'(s)$ получаем уравнение

$$\frac{\varphi'}{n-\lambda(\varphi')^2}=\frac{c}{s^3}.$$

Отсюда находим $\varphi'(s)$

$$\varphi'(s)=\frac{-s^3}{2\lambda c}\pm\sqrt{\left(\frac{s^3}{2\lambda c}\right)^2+\frac{n}{\lambda}}.$$

Оставляем решение со знаком плюс перед корнем, так как решение со знаком минус перед корнем дает функцию, возрастающую по абсолютной величине. Убывающее решение имеет вид

$$\varphi'(s) = \frac{\dfrac{n}{\lambda}}{\sqrt{\left(\dfrac{S^3}{2\lambda c}\right)^2 + \dfrac{n}{\lambda}} + \dfrac{S^3}{2\lambda c}}. \tag{6}$$

Это решение определено только для $r^2 \geqslant t^2$. В этом случае $\varphi'(s)$ есть непрерывная функция, монотонно убывающая с возрастанием s. При подстановке (6) в функцию Лагранжа получаем, что в точке $s=0$ $L = -\dfrac{n}{\lambda}\ln 0 \to \infty$. Отсюда следует, что полученное решение не является частицеподобным.

Рассмотрим случай, когда функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{\lambda}\ln\left(1 + \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right).$$

Получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\left(1 + \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right) - \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Функция $\varphi'(s)$ определяется из уравнения

$$\frac{\varphi'}{1 + \lambda(\varphi')^2} = \frac{c}{S^3}.$$

Отсюда находим

$$\varphi'(s) = \frac{S^3}{2\lambda c} \pm \sqrt{\left(\frac{S^3}{2\lambda c}\right)^2 - \frac{1}{\lambda}}.$$

Если перед корнем знак плюс, то получаем возрастающее решение. Убывающее решение имеет вид

$$\varphi'(s) = \frac{\dfrac{1}{\lambda}}{\sqrt{\left(\dfrac{S^3}{2\lambda c}\right)^2 - \dfrac{1}{\lambda}} - \dfrac{S^3}{2\lambda c}}. \tag{8}$$

Так как $\varphi'(s)$ — величина действительная, то решение существует при условии, что $\left(\dfrac{S^3}{2\lambda c}\right)^2 \geqslant \dfrac{1}{\lambda}$ или $r^2 - t^2 \geqslant (4\lambda c^2)^{1/3}$. Это означает, что при $t = 0$ решение существует только в области пространства $r^2 \geqslant (4\lambda c^2)^{1/3}$. Такое решение не является частицеподобным.

Рассмотрим случай, когда функция Лагранжа имеет вид

$$L = L_0 + L_1,$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2, \quad L_1 = \frac{\lambda}{2n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^{2n}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\left(1 + \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^{2n-2}\right) + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^{2n-2} = 0. \tag{9}$$

Для $\varphi'(s)$ получаем уравнение

$$\varphi'(s) + \lambda(\varphi'(s))^{2n-1} = \frac{c}{S^3}. \tag{10}$$

Из (10) видно, что при $s \to 0$ $\varphi'(s) \to \infty$. Отсюда следует, что уравнение (9) не имеет частицеподобных решений.

Из исследования полученных решений можно сделать вывод, что ни одно из рассмотренных уравнений не имеет нестационарных частицеподобных решений. Оказывается, что если перейти к комплексным полям, то каждое из рассмотренных уравнений будет иметь частицеподобные решения. Для этого надо ввести функцию от комплексного аргумента и соответствующим образом дополнить функцию Лагранжа.

Комплексные поля. В этом случае $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(s)$, где s имеет вид

$$s_1 = \sqrt{r^2 - (t - i\beta)^2}, \quad s_2 = \sqrt{p^2 + (z + id)^2 - (t - i\beta)^2}.$$

Аргументы s_1 и s_2 можно представить в виде

$$s_1 = R_1 e^{i\frac{\theta_1}{2}},$$

где

$$R_1 = [(r^2 - t^2 + \beta^2)^2 + 4\beta^2 t^2]^{1/4}, \ \cos\theta_1 = \frac{(r^2 t^2 + \beta^2)}{R_1^2}, \sin\Theta_1 = \frac{2\beta t}{R_1^2}.$$

Если $\beta \neq 0$ то $s_1 \neq 0$ для любых значений r и t,

$$s_2 = R_2 e^{i\frac{\theta_2}{2}},$$

где

$$R_2 = [(r^2 - t^2 + \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\alpha z + \beta t)^2]^{1/4} \cos\theta_2 = \frac{r^2 - t^2 + \beta^2 - \alpha^2}{R_2^2},$$

$$\sin\theta_2 = \frac{2(\alpha z + \beta t)}{R_2^2} \quad \beta^2 > \alpha^2.$$

Для комплексного поля функцию Лагранжа типа Борна—Инфельда представим в виде

$$L = \frac{1}{\lambda}\left\{\left(1 - \sqrt{1 - \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2}\right) + \left(1 - \sqrt{1 - \lambda\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^2}\right)\right\}.$$

При $\lambda \to 0$ получаем функцию Лагранжа для свободного поля

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^2.$$

Тогда наряду с уравнением (1) будем иметь уравнение для комплексно-сопряженной функции φ^*

$$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_\mu^2}\left(1 - \lambda\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^2\right) + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\nu}\right)^2 = 0. \qquad (11)$$

Комплексные решения этого уравнения имеют вид

$$\varphi'_{(1)}(s_1) = \frac{c}{\sqrt{\lambda c^2 + s_1^6}}, \quad \varphi'_{(2)}(s_2) = \frac{c}{\sqrt{\lambda c^2 + s_2^6}}.$$

Комплексные функции $\varphi'_{(1)}(s_1)$ и $\varphi'_{(2)}(s_2)$ есть непрерывные функции, определенные для любых значений r и t, так как $\lambda c^2 + s_1^6$ и $\lambda c^2 + s_2^6$ не обращаются в нуль ни в одной точке (r, t). Полученные решения являются частицеподобными.

Рассмотрим случай функции Лагранжа типа

$$L = \frac{n}{\lambda}\ln\left\{\left(n - \lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right)\left(n - \lambda\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^2\right)\right\}.$$

Комплексные решения уравнения (5) имеют вид

$$\varphi'_{(1)}=\frac{\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{s_1^3}{2\lambda c}\right)^2+\frac{n}{\lambda}+\frac{s_1^3}{2\lambda c}}},\quad \varphi'_{(2)}=\frac{\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{s_2^3}{2\lambda c}\right)^2+\frac{n}{\lambda}+\frac{s_2^3}{2\lambda c}}}.$$

Эти функции определены и непрерывны для любых r и t. Причем $L_{(1)}<\infty$ и $L_{(2)}<\infty$. Следовательно, решения являются частицеподобными.

Случай функции Лагранжа типа

$$L=\frac{1}{\lambda}\ln\left\{\left(1+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right)\left(1+\lambda\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^2\right)\right\}.$$

Соответствующие комплексные решения имеют вид

$$\varphi'_{(1)}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{s_1^3}{2\lambda c}\right)^2-\frac{1}{\lambda}+\frac{s_2^3}{2\lambda c}}},\quad \varphi'_{(2)}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{s_2^3}{2\lambda c}\right)^2-\frac{1}{\lambda}+\frac{s_2^3}{2\lambda c}}}.$$

При $t=0$ $s_1=\sqrt{r^2+\beta^2}$, $s_2=\sqrt{r^2+(\beta^2-\alpha^2)}$, т. е. $\varphi'_{(1)}$ и φ'_2 становятся действительными функциями. При этом должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{(r^2+\beta^2)^3}{(2\lambda c)^2}\geqslant\frac{1}{\lambda},\quad \frac{[r^2+(\beta^2-\alpha^2)]^3}{(2\lambda c)^2}\geqslant\frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда получаем ограничение на параметры α, β, λ, c. При этих условиях функции φ'_1 и φ'_2 определены и непрерывны для любых r и t. Решения являются частицеподобными.

Случай функции Лагранжа типа

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^2+\frac{\lambda}{2n}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^{2n}+\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial x_\mu}\right)^{2n}\right\},$$

$$n=2,\ 3,\ \ldots$$

Соответствующие комплексные решения имеют вид

$$\varphi'_{(1)}+\lambda(\varphi'_{(1)})^{2n-1}=\frac{c}{s_1^3},\quad \varphi'_{(2)}+\lambda(\varphi'_{(2)})^{2n-1}=\frac{c}{s_2^3}.$$

Так как s_1^3 и s_2^3 не обращаются в нуль ни в одной точке $(r,\ t)$, $\varphi'(s)$ всюду непрерывна, т. е. частицеподобные решения существуют.

Для выяснения смысла параметров α и β необходимо иметь явное выражение $\varphi(s)$. Поскольку во всех рассмотренных случаях явно выразить $\varphi(s)$ не удается, рассмотрим линейное уравнение скалярного поля без массового члена как наиболее простой случай, где явно можно выразить $\varphi(s)$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}=0.$$

Это уравнение имеет решения вида

$$\varphi_1=\frac{c}{r^2-(t-i\beta)^2},\quad \varphi_2=\frac{c}{\rho^2+(z+i\alpha)^2-(t-i\beta)^2}.$$

В этом случае постоянные α и β определяют среднее время существования распадающейся частицы, которое можно определить как время, в течение которого $\varphi^*\varphi$ в точке $r=0$ от момента $t=0$ уменьшается в два раза. Оно определяется из соотношения

$$\tau=\frac{t}{c},\ \text{где}\ t_1^2=(\sqrt{2}-1)\beta^2,\ t_2^2=\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{\sqrt{2(\beta^4+\alpha^4)+(\beta^2-\alpha^2)}}.$$

Так как $\beta^2 > \alpha^2$, то t_2 всегда конечно. В случае нелинейных уравнений t_1 и t_2 будут связаны с постоянными λ и c.

Из рассмотренного можно сделать вывод, что только комплексные нелинейные поля (в пределах исследуемых уравнений) имеют нестационарные частицеподобные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Щущурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
2. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
3. Synge J. L. Proc. Roy. Soc., **A283**, 14, 1965.

Поступила в редакцию
6. 6 1966 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 539.17.01 : 539.172.2

Д. В. МЕБОНИЯ

ЭФФЕКТ ИСКАЖЕНИЯ В РЕАКЦИЯХ ТИПА $(e,\ e'\ p)$

1. Квазиупругие реакции дают ценную информацию о разных характеристиках ядер, поэтому они исследуются довольно интенсивно [1—4]. В реакциях типа $(e, e'p)$ в отличие от квазиупругих (например $(p, 2p)$) электроны не «чувствуют» искажающегося ядерного потенциала и в хорошем приближении описываются плоскими волнами. В результате этого сечение процесса всегда можно факторизовать на сечение свободного рассеяния электрона на протоне и искаженное импульсное распределение протонов в ядре ρ_l'

$$\rho_l' = \frac{1}{2l+1}\sum_m \left| (2\pi)^{-3/2} \int \psi_{\vec{k}}^{(-)*}(\vec{r})\, e^{i\vec{p}\vec{r}} \chi_{lm}(\vec{r})\, d\vec{r} \right|^2, \tag{1}$$

где $\chi_{lm}(\vec{r})$ и $\psi_{\vec{k}}^{(-)}(r)$—волновые функции протона в начальном и конечном состоянии, $\vec{p}$ — передаваемый импульс.

Если пренебречь искажением, то $\psi_{\vec{k}}^{(-)}(\vec{r})$ переходит в плоскую волну $\psi_{\vec{k}}^{(-)}(\vec{r}) \to e^{i\vec{k}\vec{r}}$, а ρ_l' в импульсное распределение протонов в ядре $\rho_l(q)$

$$\rho_l(q) = \frac{1}{2l+1}\sum_m \left| (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \chi_{lm}(r)\, dr \right|^2. \tag{2}$$

Следовательно, устанавливается прямая связь между эффектом искажения и искаженным импульсным распределением ρ_l'.

2. Якобом и Марисом [2] было показано, что учет искажения уменьшает вероятность выхода реакции, но практически не меняет форму функции угловой корреляции. Поэтому влияние искажения на дифференциальное сечение можно характеризовать одним параметром, фактором подавления R_l, который определяется отношением

$$R_l = \rho_{l\max}' / \rho_{l\max}. \tag{3}$$

Фактор подавления в основном определяется глубиной мнимой части оптического потенциала и слабо зависит от других параметров [9]. В работах [2, 9], во-первых, искажение учитывалось в квазиклассическом приближении, во-вторых, радиальное распределение искажающего ядерного потенциала бралось в виде функции Гауса. Кроме того, такой метод не позволяет учесть кулоновское искажение.