Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1967

УДК 532.70

МГУ

В. А. КРАСНИКОВ

К УРАВНЕНИЯМ КЛАССИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Для многокомпонентных классических систем выведены уравнения гидродинамики с учетом диссипационных процессов не на основе кинетического уравнения, а исходя непосредственно из цепочки уравнений Боголюбова для функций распределения.

Хорошо известно, что последовательный вывод уравнений гидродинамики для достаточно плотных газов и жидкостей на основе статистической механики требует выхода за рамки кинетического уравнения. В этой работе мы получим уравнения гидродинамики многокомпонентных систем с учетом диссипационных процессов диффузии, вязкости и теплопроводности непосредственно из цепочки уравнений Боголюбова [1], [2] для функций распределения. Для этого надо, как указывалось ранее [3], принять во внимание члены порядка μ (μ — параметр неоднородности), которые были отброшены в полученных тождествах. Эти тождества имеют вид *

$$\frac{\partial n_{a_1}}{\partial \tau} + \frac{\partial (n_{a_1} V^\alpha)}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{1}{m_{a_1}} \frac{\partial I^\alpha_{a_1}}{\partial \xi^\alpha}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho V^\alpha)}{\partial \tau} = &-\frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \int p^\alpha p^\beta F_{a_1} d\vec{p} - \frac{\partial U_{a_1}}{\partial \xi^\alpha} n_{a_1} - \\ &- \frac{1}{2\mu} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} \{D_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + D_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R)\} d\vec{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (n\varepsilon)}{\partial \tau} = &-\frac{1}{m_{a_1}} I^\alpha_{a_1} \frac{\partial U_{a_1}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \int \frac{|p - m_{a_1} V|^2}{2 m_{a_1}} p^\alpha F_{a_1} d\vec{p} - \\ &- \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \frac{\partial V^\beta}{\partial \xi^\alpha} \int (p^\alpha - m_{a_1} V^\alpha)(p^\beta - m_{a_1} V^\beta) F_{a_1} d\vec{p} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{1}{m_{a_1}} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \int \Phi_{a_1 a_2} G_{a_1 a_2}(\tau, \xi, R) d\vec{R} - \\ &- \frac{1}{2 v_{a_1} v_{a_2}} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_2}}{\partial R^\alpha} \left\{ \frac{1}{m_{a_1}} G^\alpha_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + \frac{1}{m_{a_2}} G^\alpha_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R) - \right. \\ &\left. - V^\alpha [D_{a_1 a_2}(\tau, \xi, -R) + D_{a_2 a_1}(\tau, \xi - \mu R, R)] \right\} d\vec{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

* Для сокращения записи суммирование по повторяющимся индексам распространено и на индексы компонентов. Оставшиеся индексы всегда указывают, было или нет проведено такое суммирование.

Напомним, что полное разложение по μ этих соотношений предусматривает как разложения типа

$$G^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi - \mu R, R) = G^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) - \mu \frac{\partial G_{a_2a_1}(\tau, \xi, R)}{\partial \xi^{\beta}} R^{\beta} + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 G^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R)}{\partial \xi^{\beta} \partial \xi^{\gamma}} R^{\beta} R^{\gamma} - \mu^3 \ldots,$$

так и разложения типа

$$G^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) = {}^{(0)}G^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) + \mu {}^{(1)}G^{\alpha}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) + \mu^2 \ldots,$$

где ${}^{(0)}G^{\alpha}_{a_2a_1}$ является локально-равновесной средней, зависящей от τ и $\vec{\xi}$ только через параметры состояния n_{a_e}, U_{a_e}, θ и $\vec{V}$; а ${}^{(1)}G^{\alpha}_{a_2a_1}$ представляет форму, линейную по градиентам этих параметров и т. д.

Учитывая сказанное, преобразуем (1), (2) и (3):

$$\frac{\partial n_{a_1}}{\partial \tau} + \frac{\partial (n_{a_1} V^{\alpha})}{\partial \xi^{\alpha}} = - \frac{1}{m_{a_1}} \frac{\partial {}^{(1)}\widetilde{I}^{\alpha}_{a_1}}{\partial \xi^{\alpha}}, \tag{4}$$

$$\rho \left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \tau} + V^{\beta} \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} \right) = - \frac{\partial P}{\partial \xi^{\alpha}} + \mu \frac{\partial {}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^{\beta}} - \frac{\partial U_{a_1}}{\partial \xi^{\alpha}} n_{a_1},$$

$$\frac{\partial (n\widetilde{\varepsilon})}{\partial \tau} = - \frac{\partial (n\varepsilon V^{\alpha})}{\partial \xi^{\alpha}} - P \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} + \mu \left\{ \frac{\partial V^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} {}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta} - \frac{\partial {}^{(1)}\widetilde{S}_{\alpha}}{\partial \xi^{\alpha}} \right\},$$

где

$${}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}(\tau, \xi) = - \frac{1}{m_{a_1} v_{a_1}} \int (p^{\alpha} - m_{a_1} V^{\alpha})(p^{\beta} - m_{a_1} V^{\beta}) {}^{(1)}F_{a_1} d\vec{p} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\alpha}} R^{\beta} {}^{(1)}D_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) d\vec{R},$$

$${}^{(1)}\widetilde{S}_{\alpha}(\tau, \xi) = \frac{1}{2m^2_{a_1} v_{a_1}} \int \frac{|p - m_{a_1} V|^2}{2m_{a_1}} (p^{\alpha} - m_{a_1} V^{\alpha}) {}^{(1)}F_{a_1} d\vec{p} + \frac{1}{2m_{a_1}} \int \Phi_{a_1a_2} {}^{(1)}\widetilde{G}^{\alpha}_{a_1a_2}(\tau, \xi, R) d\vec{R},$$

$${}^{(1)}\widetilde{I}^{\alpha}_{a_1} = - \frac{1}{2m_{a_2}} \int \frac{\partial \Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\beta}} R^{\alpha} {}^{(1)}G^{\beta}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) d\vec{R} + \frac{\mu}{4m_{a_2}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\gamma}} \int \frac{\partial \Phi_{a_1a_2}}{\partial R^{\beta}} R^{\alpha} R^{\gamma} {}^{(1)}G^{\beta}_{a_2a_1}(\tau, \xi, R) d\vec{R}$$

(Отмеченные чертой средние берутся в системе локального центра инерции.)

Вообще говоря, ${}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}$, ${}^{(1)}\widetilde{S}_{\alpha}$ и ${}^{(1)}\widetilde{I}^{\alpha}_{a_1}$ в силу сделанного предположения о возможности разложения по градиентам должны зависеть от градиентов всех параметров состояния. Однако свойство изотропии рассматриваемого класса систем дает возможность исключить некоторые из них. Это утверждение известно как принцип симметрии Кюри [4]. Действительно, все эти выражения зависят от τ и $\vec{\xi}$ только через скалярные величины n_{a_l}, U_{a_l}, θ, а также от градиентов n_{a_l}, U_{a_l}, θ и $\vec{V}$:

$$
{}^{(1)}F_{a_1}(p' = p - m_{a_1}V) = {}^1A^{\alpha}_{a_1a_2}(p'|n_{a_e}, U_{a_e}, \theta)\frac{\partial n_{a_2}}{\partial \xi^{\alpha}} +
$$

$$
+ {}^2A^{\alpha}_{a_1a_2}\frac{\partial U_{a_2}}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^3A^{\alpha}_{a_1}\frac{\partial \theta}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^4A^{\alpha\beta}_{a_1}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}},
$$

$$
{}^{(1)}D_{a_1a_2}(\tau, \xi, R) = {}^1B^{\alpha}_{a_1a_2a_3}(R|n_{ae}, U_{ae}, \theta)\frac{\partial n_{a_3}}{\partial \xi^{\alpha}} +
$$

$$
+ {}^2B^{\alpha}_{a_1a_2a_3}\frac{\partial U_{a_3}}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^3B^{\alpha}_{a_1a_2}\frac{\partial \theta}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^4B^{\alpha\beta}_{a_1a_2}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}}.
$$

Однако вследствие изотропии координатного и импульсного пространства входящие сюда в виде коэффициентов тензоры являются изотропными. Компоненты изотропных тензоров первого, второго и третьего рангов должны удовлетворять условиям (см., например, [5])

$$
L^{\alpha}(\vec{a}) = a^{\alpha}L_1(|\vec{a}|)
$$

$$
M^{\alpha\beta}(\vec{a}) = a^{\alpha}a^{\beta}M_1(|\vec{a}|) + \delta_{\alpha\beta}M_2(|\vec{a}|)
$$

$$
N^{\alpha\beta\gamma}(\vec{a}) = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\gamma}N_1(|\vec{a}|) + a^{\alpha}\delta_{\beta\gamma}N_2(|\vec{a}|) +
$$

$$
+ a^{\beta}\delta_{\alpha\gamma}N_3(|\vec{a}|) + a^{\gamma}\delta_{\alpha\beta}N_4(|\vec{a}|).
$$

Пользуясь этими соотношениями, тензор вязких напряжений, поток тепла и диффузионные потоки можно переписать в следующем виде:

$$
{}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \eta\left(\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} + \frac{\partial V^{\beta}}{\partial \xi^{\alpha}} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^{\gamma}}{\partial \xi^{\gamma}}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V^{\gamma}}{\partial \xi^{\gamma}},
$$

$$
{}^{(1)}\widetilde{S}_{\alpha} = {}^1b_{a_1}\frac{\partial \bar{\mu}_{a_1}}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^2b\frac{\partial \theta}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^3b_{a_1}\frac{\partial U_{a_1}}{\partial \xi^{\alpha}}, \tag{5}
$$

$$
{}^{(1)}\widetilde{I}^{\alpha}_{a_1} = {}^1D_{a_1a_2}\frac{\partial \bar{\mu}_{a_2}}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^2D_{a_1}\frac{\partial \theta}{\partial \xi^{\alpha}} + {}^3D_{a_1a_2}\frac{\partial U_{a_2}}{\partial \xi^{\alpha}}.
$$

Для удобства последующих рассуждений мы ввели химические потенциалы $\bar{\mu}_{a_1} = \mu_{a_1} + U_{a_1}$. Тогда (5) представляют собой известные соотношения Онсагера для изотропных систем. Входящие сюда скалярные феноменологические коэффициенты при слабом взаимодействии между частицами в принципе могут быть определены из кинетического уравнения. В случае произвольного взаимодействия их надо брать из опыта.

Для нахождения некоторых связей между этими феноменологическими коэффициентами следует рассмотреть условие статистического равновесия и воспользоваться соотношением для диффузионных потоков ${}^{(1)}\widetilde{I}^{\alpha}_{a_1}$. Так же, как и в [6], можно получить:

$$
{}^3b_{a_1} = 0, \quad {}^3D_{a_1a_2} = 0, \quad (a_1, a_2 = 1, 2, \ldots M),
$$

$$
\sum_{a_1=1}^{M} {}^1b_{a_1} = 0; \quad \sum_{a_1=1}^{M} {}^1D_{a_1a_2} = \sum_{a_2=1}^{M} {}^1D_{a_1a_2} = 0; \quad \sum_{a_1=1}^{M} {}^2D_{a_1} = 0.
$$

Если ввести энтропию*

$$
s = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\right)_{v, \mu_{\alpha_i}},
$$

* Здесь s и Ω — энтропия и термодинамический потенциал на одну частицу.

воспользоваться соотношением

$$\varepsilon = \Omega - \mu_{a_1} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{a_1}} - \theta \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}$$

и перейти к переменным t и $\vec{r}$, то получим систему гидродинамических уравнений с учетом вязкости, диффузии и теплопроводности:

$$\frac{\partial n_{a_1}}{\partial t} + \frac{\partial (n_{a_1} V^\alpha)}{\partial r^\alpha} = - \frac{1}{m_{a_1}} \frac{\partial {}^{(1)}\widetilde{I}^\alpha_{a_1}}{\partial r^\alpha}; \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, M),$$

$$\rho \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial r_\beta} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r^\alpha} + \frac{\partial {}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta}}{\partial r^\beta} - \frac{\partial U_{a_1}}{\partial r^\alpha} n_{a_1},$$

$$n \left(\frac{\partial s}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial s}{\partial r_\beta} \right) = - \frac{\partial J^\alpha_s}{\partial r^\alpha} - \frac{{}^{(1)}\widetilde{I}^\alpha_1}{\theta} \frac{\partial \mu_{a_1}}{\partial r^\alpha} - \frac{J^\alpha_s}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r^\alpha} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial V^\beta}{\partial r^\alpha} {}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta},$$

где

$${}^{(1)}\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial r^\beta} + \frac{\partial V^\beta}{\partial r^\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial V^\gamma}{\partial r^\gamma} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial V^\gamma}{\partial r^\gamma},$$

$$J^\alpha_s = - \frac{1}{\theta} \left({}^{(1)}\widetilde{S}_\alpha + \frac{\mu_{a_1}}{m_{a_1}} {}^{(1)}\widetilde{I}^\alpha_{a_1} \right),$$

$${}^{(1)}\widetilde{S}_\alpha = \sum_{i=1}^{M-1} b_{a_1} \frac{\partial (\bar{\mu}_{a_1} - \bar{\mu}_{a_M})}{\partial r^\alpha} + {}^2b \frac{\partial \theta}{\partial r^\alpha},$$

$${}^{(1)}I^\alpha_{a_1} = \sum_{a_2=1}^{M-1} {}^1D_{a_1 a_2} \frac{\partial (\bar{\mu}_{a_2} - \bar{\mu}_{a_M})}{\partial r^\alpha} + {}^2D_{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial r^\alpha}.$$

В заключение автор выражает искреннюю признательность акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. ЖЭТФ, **16**, 691, 1946.
2. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
3. Красников В. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 87, 1966.
4. Де Гроот, Мазур. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
5. Robertson. Proc. Cambr. Phil. Soc., **36**, No. 2, 210, 1940.
6. Красников В. А. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 57, 1966.

Поступила в редакцию
13. 10 1965 г.

Кафедра
теоретической физики