

Г. М. ФИЛИПОВ

К РАССЕЯНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛНАХ

С точки зрения системы нелинейных уравнений Власова для анизотропной плазмы рассматривается рассеяние электромагнитной волны плазменной волной в том случае, когда направления распространения их совпадают. В граничной задаче для полупространства обнаружен эффект аккумуляции комбинационной волной энергии падающей волны. Найдены условия, при которых электромагнитная волна в возмущенной плазме модулирована в пространстве, найден период модуляции.

Вопрос о рассеянии электромагнитных волн на плазменных волнах ставился в работах [1, 2], где указывалось на появление волн с комбинационными частотами и оценивались интенсивности этих волн. Плазменная волна, изменяя концентрацию электронов, вызывает соответствующие изменения диэлектрической проницаемости плазмы. При распространении электромагнитной волны в плазме возникают боковые частоты с амплитудами, пропорциональными глубине модуляции электронной плотности. Мы попытаемся развить строгую теорию этого явления в том частном случае, когда направления распространения электромагнитной и плазменной волн совпадают. Найдем области тех частот, когда боковые волны имеют максимальную интенсивность, не зависящую от глубины модуляции электронной плотности. В случае стационарных периодических возмущений плотности эти частоты удовлетворяют условиям Брэгга. Именно на этих частотах возникают рассмотренные ниже эффекты трансформации и модуляции падающей на возмущенную плазму электромагнитной волны.

Предположим, что в неограниченной плазме вдоль оси z распространяется плазменная волна, имеющая частоту Ω и волновое число K .

Функцию распределения электронов в плазменной волне обозначим f .

Пусть слабая электромагнитная волна распространяется также вдоль оси z . Возмущение функции распределения обозначим через φ и будем считать $\varphi \ll f$. Поперечные поля обозначим через $\vec{E}$, $\vec{H}$, продольное поле

$$E_z = E_{z0} + E_{z1},$$

где E_{z1} — возмущение, вызываемое поперечной волной; $E_{z0} \gg E$. Пусть, кроме того, плазма находится в однородном магнитном поле H_0 , направленном вдоль оси z .

Система уравнений Власова [3] приводит к следующей системе уравнений для величин порядка φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{e}{m} \left\{ E_{z1} \frac{\partial f}{\partial v_z} + E_{z0} \frac{\partial \varphi}{\partial v_z} + \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}] \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} + \frac{1}{c} [\vec{v} \vec{H}_0] \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}} \right\} = -v(\vec{v}) \varphi \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_{z1}}{\partial z} = -4\pi e \int \varphi d\vec{v},$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi e}{c^2} \int \vec{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\vec{v} = 0,$$

$$- \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E}; \quad \text{div } \vec{E} = 0,$$

где $v(\vec{v})$ — частота столкновений электронов. В уравнении (1) мы пренебрегли членами порядка φ^2 . Движением ионов пренебрегаем.

Как известно [3], в случае длинных плазменных волн, распространяющихся вдоль оси z , функция распределения электронов может быть записана в виде

$$f \cong f_0 - \frac{eE_0}{m(\Omega - Kv_z)} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \cos(\Omega t - Kz),$$

где

$$f_0 = N_0 \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\kappa T}},$$

E_0 — амплитуда продольного электрического поля волны, N_0 — равновесная плотность электронов, e , m — заряд и масса электрона. При этом закон дисперсии имеет вид

$$\Omega^2 = \omega_e^2 + \frac{3\kappa T}{m} K^2,$$

где $\omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m}$. Если длина плазменной волны сравнима с дебаевским расстоянием $\sqrt{\frac{\kappa T}{8\pi e^2 N_0}}$, то волна сильно затухает [4].

Для поперечных компонентов токов из (1) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_x}{\partial t} + v_{\text{эфф}} j_x &= \frac{e^2 N_0}{m} E_x \left[1 + \frac{eE_0 K}{m\Omega^2} \cos(\Omega t - Kz) \right] - \\ &- \frac{e^2 N_0}{mc} \frac{eE_0}{m\Omega} H_y \cos(\Omega t - Kz) + \frac{eH_0}{mc} j_y, \\ \frac{\partial j_y}{\partial t} + v_{\text{эфф}} j_y &= \frac{e^2 N_0}{m} E_y \left[1 + \frac{eE_0 K}{m\Omega^2} \cos(\Omega t - Kz) \right] + \\ &+ \frac{e^2 N_0}{mc} \frac{eE_0}{m\Omega} H_x \cos(\Omega t - Kz) - \frac{eH_0}{mc} j_x. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что фазовая скорость плазменной волны много больше тепловой скорости электронов, что всегда выполняется для

слабо затухающих плазменных волн. Кроме того, мы пренебрегли пространственной дисперсией, считая фазовую скорость электромагнитной волны много большей тепловой скорости электронов.

Для Фурье-компонентов поперечных полей имеем уравнения:

$$E_{\omega+n\Omega, k+nK}^{\pm} + \frac{h^2}{(k+nK)^2 - \frac{(\omega+n\Omega)^2}{c^2}} \varepsilon'_{\pm}(\omega+n\Omega) \left[\frac{\omega - \frac{k}{K}\Omega}{\omega + (n+1)\Omega} E_{\omega+(n+1)\Omega, k+(n+1)K}^{\pm} + \frac{\omega - \frac{k}{K}\Omega}{\omega + (n-1)\Omega} E_{\omega+(n-1)\Omega, k+(n-1)K}^{\pm} \right] = 0; \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots,$$

где

$$E^{\pm} = E_x \pm iE_y,$$

$$\varepsilon'_{\pm}(\omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega \mp \omega_H + i\nu_{эфф})},$$

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad h^2 = \frac{eE_0K}{m\Omega^2} \cdot \frac{\omega_e^2}{c^2}.$$

Мы получили две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, условием существования решения для которых служит равенство нулю их определителей.

Эти определители абсолютно сходятся везде, за исключением точек простых полюсов, когда какой-либо из знаменателей

$$D_n^{\pm} = (k+nK)^2 - \frac{(\omega+n\Omega)^2}{c^2} \varepsilon'_{\pm}(\omega+n\Omega)$$

обращается в нуль (см. также [5]). Условие равенства нулю определителей дает два дисперсионных уравнения. Мы найдем стационарные решения, если будем считать ω действительным. Кроме того, сделаем следующие предположения:

$$h^2 \ll K^2, \quad \omega \gg \nu_{эфф}, \quad \omega_e \gg \nu_{эфф}, \quad \frac{h^2}{K^2} > \frac{\nu_{эфф}}{\omega}.$$

При этом будем пренебрегать величинами порядка $\frac{h^4}{K^4}$ и выше.

Дисперсионные уравнения можно записать в виде:

$$1 - h^4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\omega - \frac{k}{K}\Omega\right)^2}{D_n^{\pm} D_{n+1}^{\pm} (\omega+n\Omega)(\omega+n\Omega+\Omega)} = 0. \quad (2)$$

Здесь мы опустили члены, пропорциональные более высоким степеням h^2 , чем h^4 . Пренебречь ими, однако, нельзя в том случае, если три или более знаменателей $D_n^{\pm}$ могут одновременно обратиться в нуль. Такие случаи мы рассматривать не будем.

Пусть сначала только один из знаменателей $D_n^{\pm}$ может обратиться в нуль. Этот случай наиболее ординарный. Для того чтобы уравнение (2) было удовлетворено, нужно, чтобы два слагаемых (одного

не может быть) под знаком суммы имели порядок $\frac{1}{h^4}$. Это достигается при $D_n^\pm \sim h^4$. При этом остальными слагаемыми можно пренебречь и уравнение дает поправку к невозмущенному решению порядка $\frac{h^4}{K^4}$.

В нашем приближении среда ведет себя как однородная.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда одновременно возможно обращение в нуль $D_0^\pm$ и $D_{\pm 1}^\pm$:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'_\pm(\omega) = 0, \\ (k - K)^2 - \frac{(\omega - \Omega)^2}{c^2} \varepsilon'_\pm(\omega - \Omega) = 0. \quad (3)$$

Уравнения (2) имеют корни, расположенные вблизи корней систем (3). Пусть k_0 является действительной частью корня одной из систем (3). Тогда $k_0 + \Delta k$, где $|\Delta k| \ll k_0$, $|\Delta k| \ll |K - k_0|$, должно удовлетворять соответствующему уравнению (2). Отбрасывая малые члены, имеем* (далее все вычисления проводятся для компонента E^+ , соответствующие формулы для E^- получаются при изменении знака перед ω_n):

$$\Delta k_{1,2} \cong \pm \frac{1}{2} \sqrt{h^4 \frac{\left(\omega - \frac{k_0}{K} \Omega\right)^2}{k_0(k_0 - K)\omega(\omega - \Omega)} - \frac{v_{эфф}^2}{4} \frac{\omega_e^4}{c^4} \left(\frac{\omega}{k_0(\omega - \omega_n)} - \frac{\omega - \Omega}{(k_0 - K)(\omega - \Omega - \omega_n)}\right)^2 + i \frac{v_{эфф}}{4} \frac{\omega_e^2}{c^2} \left(\frac{\omega}{k_0(\omega - \omega_n)^2} + \frac{\omega - \Omega}{(k_0 - K)(\omega - \Omega - \omega_n)^2}\right)}.$$

Величины $E_{\omega+n\Omega; k+nK}^\pm$ определим как алгебраические дополнения центральных строк определителей (столкновениями пренебрегаем):

$$E_{\omega, k}^+ \cong 1; E_{\omega - \Omega, k - K}^+ \cong \text{sign}\left(\omega - \frac{k_0}{K} \Omega\right) \sqrt{\frac{k_0(\omega_0 - \Omega)}{(k_0 - K)\omega_0}}.$$

Остальные компоненты $E_{\omega+n\Omega; k+nK}^\pm$ имеют порядок $\frac{h^4}{k^4}$, и мы полагаем их равными нулю. Собственные функции, соответствующие собственным значениям $k = k_0 \pm \Delta k_{1,2}$, имеют вид

$$E_{1,2}^\pm \sim \exp -i\{\omega t - (k_0 + \Delta k_{1,2})z\} \mp \text{sign}\left(\omega - \frac{k_0}{K} \Omega\right) \sqrt{\frac{k_0(\omega - \Omega)}{(k_0 - K)\omega}} \times \\ \times \exp -i\{(\omega - \Omega)t - (k_0 - K + \Delta k_{1,2})z\}.$$

При $k = -k_0$ приближенно удовлетворяется первое из уравнений (3), но не удовлетворяется второе; при $k - K = -(k_0 - K)$ приближенно удовлетворяется второе из уравнений (3), но не удовлетворяется первое. Поэтому частотам ω , $\omega - \Omega$ кроме функций $E_{1,2}^\pm$, соответствуют собственные функции

$$E_3^+ \sim \exp \left\{ -i\omega t - ik_0 z + \frac{\omega_e^2}{2k_0 c^2} \frac{\omega \cdot v_{eff}}{(\omega - \omega_n)^2} z \right\},$$

$$E_4^+ \sim \exp \left\{ -i(\omega - \Omega)t - i(k_0 - K)z + \frac{\omega_e^2}{2(k_0 - K)c^2} \frac{(\omega - \Omega) v_{eff}}{(\omega - \Omega - \omega_n)^2} z \right\}.$$

* При $|K - k_0| \leq h$ наше приближение не справедливо. В частности, при $K = k_0$ должно быть $\Delta k_{1,2} \cong \pm \sqrt[3]{\frac{(\omega - \Omega)^2}{2k_0\omega(\omega - \Omega)}} h^4$.

Перейдем к приложениям полученных формул.

1. Падение электромагнитной волны на полупространство, занятое возмущенной изотропной плазмой.

В изотропной плазме $\omega_H = 0$. На рис. 1 изображены две ветви гиперболы, для которых

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = 0; \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}.$$

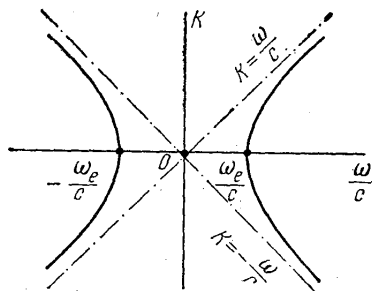


Рис. 1

Будем считать, что $\frac{v_{eff}}{\omega} \ll \frac{h^2}{K^2}$, это позволит нам пренебречь столкновениями. Оба уравнения (3) будут с точностью до $\frac{v_{eff}}{\omega}$ удовлетворены, если точки $\left(\frac{\omega}{c}, k\right)$ и $\left(\frac{\omega - \Omega}{c}, k - K\right)$ лежат на кривых рис. 1. Это возможно при

$$k_0 = \frac{1}{2} \left(K \pm \frac{\Omega}{c} \sqrt{1 + \frac{\omega_e^2}{K^2 c^2 - \Omega^2}} \right),$$

$$\omega_0 = \sqrt{k_0^2 c^2 + \omega_e^2}.$$

Пусть электромагнитная волна частоты ω_0 , распространяющаяся вдоль оси z в однородной плазме с плотностью электронов N_0 , падает на полупространство, занятое возмущенной плазмой, ограниченное слева плоскостью $z=0$. При этом могут представиться следующие случаи.

Случай $\omega_0 > \Omega$, $k_0 < K$. Трансформация. Имеем при $z < 0$

$$E \sim e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} + \beta_1 e^{-i\omega_0 t - ik_0 z} + \beta_2 e^{-i(\omega_0 - \Omega)t - i(K - k_0)z}$$

и при $z > 0$:

$$E \sim \alpha_1 e^{-\delta z} \left[e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} - i \sqrt{\frac{k_0(\omega_0 - \Omega)}{(K - k_0)\omega_0}} e^{-i(\omega_0 - \Omega)t - (K - k_0)z} \right] +$$

$$+ \alpha_2 e^{-i(\omega_0 - \Omega)t + i(K - k_0)z},$$

где α_1 , α_2 , β_1 , β_2 — неопределенные коэффициенты, которые находятся из граничных условий, δ — показатель затухания, равный

$$\delta = \frac{\omega_0 - \frac{k_0}{K} \Omega}{2 \sqrt{\omega_0(\omega_0 - \Omega)}} \cdot \frac{h^2}{\sqrt{k_0(K - k_0)}}.$$

Здесь мы учли еще условия излучения, требующие, чтобы при $z \rightarrow \infty$ не было обратной волны.

Граничные условия состоят в непрерывности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $z = 0$. Это дает

$$\beta_1 \cong -i \frac{\delta}{2k_0}; \quad \beta_2 \cong -i \sqrt{\frac{k_0(\omega_0 - \Omega)}{(K - k_0)\omega_0}} \left(1 - i \frac{K\delta}{2k_0(K - k_0)}\right);$$

$$\alpha_1 \cong 1 - i \frac{\delta}{2k_0}; \quad \alpha_2 \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0(\omega_0 - \Omega)}{(K - k_0)\omega_0}} \cdot \frac{\delta}{K - k_0}.$$

Итак, в данном случае при $z \rightarrow \infty$ остается только волна частоты $\omega_0 - \Omega$, имеющая малую амплитуду α_2 . Волна частоты ω_0 отражается слабо, но зато волна с комбинационной частотой $\omega_0 - \Omega$, рассеянная назад, имеет большую амплитуду β_2 . Наглядно говоря, волна частоты ω_0 «трансформируется» в волну частоты $\omega_0 - \Omega$, причем коэффициент транс-

формации равен $\eta = \sqrt{\frac{k_0(\omega_0 - \Omega)}{(K - k_0)\omega_0}}$. Коэффициент трансформации может

принимать большие значения при $k_0 \cong K \left(\eta_{\max} \sim \sqrt{\frac{K}{h}} \right)$, и при этом амплитуда β_2 может быть во много раз больше амплитуды падающей волны. То же самое относится к плотности энергии в падающей и отраженной волне. Само по себе это не говорит об увеличении энергии электромагнитных волн, поскольку групповая скорость волны с частотой $\omega_0 - \Omega$ мала. Для выяснения вопроса подсчитаем потоки падающей и отраженной энергии. Для потока падающей энергии получаем выражение $I = \frac{c}{8\pi} \frac{k_0 c}{\omega_0}$, в то

же время рассеянный поток равен $I' \cong \frac{c}{8\pi} \frac{k_0 c}{\omega_0}$ и ясно, что при $k_0 \cong K$ отраженная волна частоты $\omega_0 - \Omega$ «аккумулирует» энергию падающей волны.

Случай $\omega_0 > \Omega$; $k_0 > K$. Модуляция. Аналогичный расчет дает

$$\beta_1 \cong 0; \quad \beta_2 \cong -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{k_0 \Omega}{K \omega_0}\right) \frac{h^2}{(k_0 - K)^2},$$

при $z > 0$

$$E \sim \cos(\Delta k z) e^{-i\omega_0 t + i k_0 z} - i \sqrt{\frac{k_0(\omega_0 - \Omega)}{(k_0 - K)\omega_0}} \sin(\Delta k z) e^{-i(\omega_0 - \Omega)t + i(k_0 - K)z}.$$

Здесь поле в возмущенной части плазмы модулировано по амплитуде с длиной волны модуляции, равной $\frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{4\pi \sqrt{k_0(k_0 - K)} \omega_0 (\omega_0 - \Omega)}{h^2 \left| \omega_0 - \frac{k_0}{K} \Omega \right|}$.

При этом волна частоты $\omega_0 - \Omega$ также может аккумулировать энергию при $k_0 \cong K$.

Возможности $\omega_0 < \Omega$, $k_0 \cong K$ не реализуются, так как соответствующие плазменные волны сильно затухают.

2. Падение электромагнитной волны на полупространство, занятое возмущенной анизотропной плазмой.

Пусть при условиях предыдущей задачи имеется постоянное магнитное поле, направленное вдоль оси z . На рис. 2 приведена зависимость k_0 от $\frac{\omega_0}{c}$ в соответствии с первым уравнением (3) (сплошные линии — для поля E^+ , штриховые для E^-). Уравнения (3) приводят к алгебраическому уравнению 4-й степени относительно k_0 или ω_0 , которое можно решить численно.

С геометрической точки зрения система (3) требует, чтобы обе точки $\left(\frac{\omega_0}{c}, k_0\right)$, $\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{c}, k_0 - K\right)$ лежали на кривых рис. 2. При этом, конечно, и в этом случае возможны рассмотренные выше эффекты трансформации и модуляции, однако, здесь нас будут интересовать две оставшиеся возможности, не реализующиеся в изотропной плазме.

Случай $\omega_0 < \Omega$, $k_0 < K$. Модуляция.

Имеем при $z < 0$

$$E^\pm \sim e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} + \beta_1^\pm e^{-i\omega_0 t - ik_0 z} + \beta_2^\pm e^{i(\Omega - \omega_0)t + i(K - k_0)z},$$

при $z > 0$

$$E^\pm \sim \alpha_1^\pm E_1^\pm + \alpha_2^\pm E_2^\pm.$$

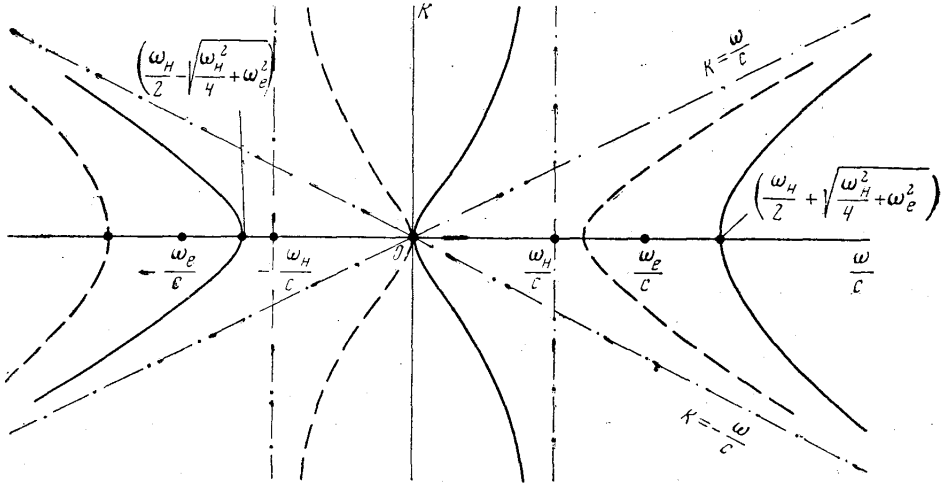


Рис. 2

Поля E_3^+ , E_4^+ не удовлетворяют условию излучения. Для волны E^+ должно быть (рис. 2) $v < \omega_0 < \omega_n$, поскольку при $\omega_0 > \frac{1}{2}\omega_n + \sqrt{\frac{1}{4}\omega_n^2 + \omega_e^2}$

должно быть $\Omega > 2\sqrt{\omega_e^2 + \frac{1}{4}\omega_n^2}$ и плазменные волны такой частоты быстро затухают. Учитывая это, имеем для E^+ (столкновениями пренебрегаем)

$$\Delta k = \frac{h^2 \left| \omega_0 - \frac{k_0}{K} \Omega \right|}{2 \sqrt{k_0 (K - k_0) \omega_0 (\Omega - \omega_0)}},$$

$$\beta_1^+ \cong 0, \quad \beta_2^+ \cong -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0 (\Omega - \omega_0)}{(K - k_0) \omega_0}} \frac{\Delta k}{K - k_0},$$

при $z > 0$

$$E^+ \sim \cos(\Delta k \cdot z) e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} - i \operatorname{sign} \left(\omega_0 - \frac{k_0}{K} \Omega \right) \sqrt{\frac{k_0 (\Omega - \omega_0)}{(K - k_0) \omega_0}} \sin(\Delta k \cdot z) e^{i(\Omega - \omega_0)t - i(K - k_0)z}.$$

Для поля E^- результат будет такой же, но при выполнении неравенств (см. рис. 2).

$$v < \Omega - \omega_0 < \omega_n; \quad \omega_0 > \sqrt{\frac{1}{4}\omega_n^2 + \omega_e^2} - \frac{1}{2}\omega_n.$$

Случай $\omega_0 < \Omega$, $k_0 < K$. Трансформация.
 При $z < 0$

$$E^{\pm} \sim e^{-i\omega_0 t + ik_0 z} + \beta_1^{\pm} e^{-i\omega_0 t - ik_0 z} + \beta_2^{\pm} e^{i(\Omega - \omega_0)t + (k_0 - K)z}.$$

При $z > 0$

$$E^{\pm} \sim \alpha_1^{\pm} E_1^{\pm} + \alpha_2^{\pm} E_4^{\pm}.$$

Причем поле $E_1^{\pm}$ затухает при $z \rightarrow \infty$. Имеем

$$\beta_1^{\pm} \cong -i \frac{\delta}{2k_0}; \quad \beta_2^{\pm} \cong \sqrt{\frac{k_0(\Omega - \omega_0)}{(k_0 - K)\omega_0}} \left(1 - i \frac{K\delta}{2k_0(k_0 - K)}\right);$$

$$\alpha_1^{\pm} \cong 1 - i \frac{\delta}{2k_0}; \quad \alpha_2^{\pm} \cong -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_0(\Omega - \omega_0)}{(k_0 - K)\omega_0}} \cdot \frac{\delta}{k_0 - K},$$

где показатель затухания δ имеет вид

$$\delta = \frac{h^2 \left(\frac{k_0}{K} \Omega - \omega_0 \right)}{2 \sqrt{k_0(k_0 - K) \omega_0 (\Omega - \omega_0)}}.$$

Отметим, что все перечисленные эффекты имеют место для частот, расположенных в окрестности порядка

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \frac{h^2}{K^2}$$

вокруг частоты ω_0 . При $\Omega = 0$ имеем $k_0 = \frac{K}{2}$, что является условием Брэгга для нормального падения волны на периодическую среду с периодом $\frac{2\pi}{K}$.

Результаты данной статьи отличаются от результатов других работ по нелинейному взаимодействию волн в плазме (см., например, [1, 2, 6, 7, 8]) прежде всего тем, что здесь амплитуды волн, порожденных взаимодействием, не малы по сравнению с амплитудами волн, вступающих во взаимодействие. Эти результаты получены без предположения о квазистационарности взаимодействия, которые присущи многим ранним работам по комбинационному рассеянию (см. [9]).

В заключение автор выражает благодарность проф. А. А. Власову за ценные замечания, высказанные при обсуждении статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fejer I. A. Can. J. Phys., **38**, 1114, 1960.
2. Berk H. Phys. Fluids., **7**, No. 6, 917—918, 1964.
3. Власов А. А. ЖЭТФ, **8**, 291, 1938; Теория многих частиц. М., Гостехиздат, 1950.
4. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **16**, 574, 1946.
5. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Аланакян Ю. Р. ЖТФ, **35**, № 9, 1552, 1965.
7. Гинзбург В. Л., Гуревич А. В. «Успехи физич. наук», **70**, 201, 1960; Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
8. Ахиезер И. А. ЖТФ, **33**, № 8, 937, 1963.
9. Рытов С. М. «Изв. АН СССР», сер. физич., № 2, 223, 1937.

Поступила в редакцию
 23. 11 1965 г.

Кафедра
 теоретической физики