Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1967

УДК 533.95.2

В. Н. МЕЛЬНИКОВ

ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ КУЛОНОВСКИХ СИСТЕМ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

Получены уравнения для функций Грина. Вычислено в квадратурах ядро уравнения Ленарда и указана его связь с ядром Ландау, используемом в дальнейших вычислениях. Методом последовательных приближений найден вид функции Грина в E- и K-пространстве, а также собственные частоты и затухание системы с учетом пространственной дисперсии.

В теории кулоновских систем одним из самых распространенных методов исследования является метод кинетических уравнений, идущий от работ Власова [1], Ландау [2] и Боголюбова [3]. В последние годы наряду с ним в области как квантовых, так и классических систем с успехом применяется метод функций Грина, в особенности опережающих и запаздывающих, основанный на получении для них уравнений из соответствующих кинетических уравнений. Детальный обзор этого метода, в частности связь вариаций среднего значения динамических величин с функциями Грина, можно найти в работе Зубарева [4]. В области классических систем аналогичные идеи использовались Боголюбовым (мл.) и Садовниковым [5]. В отличие от этой работы мы будем варьировать само кинетическое уравнение, а не заниматься расцеплением цепочки для функций Грина.

В настоящей работе рассматривается классическая система с кулоновским взаимодействием. Она предполагается нейтральной, причем заряд одного сорта движется в облаке компенсирующего заряда другого сорта. Система описывается цепочкой Боголюбова [3]:

$$\frac{\partial F_s(t, x_1, \ldots, x_s)}{\partial t} = [H_s; F_s] + \left[\sum_{1\leqslant i\leqslant s} U(t, q_i); F_s\right] + \tag{1}$$

$$+ n\int\left[\sum_{1\leqslant i\leqslant s} \Phi(|q_i - q_{s+1}|); F_{s+1} - F_s F_1(t, x_{s+1})\right] dx_{s+1},$$

где

$$H_s = \sum_{1\leqslant i\leqslant s} T(p_i) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant s} \Phi(|q_i - q_j|), \tag{2}$$

$$U(t, q) = n\int \Phi(|q - q_1|)\{\rho(t, q_1) - 1\} dq_1,$$

$$\rho(t, q) = \int F_1(t, x)\, dp.$$

Как известно, в кулоновских системах существенную роль играет параметр $\varepsilon = \frac{r_{\text{ср}}^3}{r_d^3} = \frac{1}{n r_d^3} \ll 1$, где $r_d^{-2} = \frac{4\pi e^2 n}{\theta}$. Цепочка (1) в нулевом приближении по ε дает для $F_1(q, p)$ уравнение с самосогласованным полем Власова. В следующем порядке уравнение, полученное Боголюбовым для бинарной корреляционной функции, было решено Ленардом [6], который дал явный вид кинетического уравнения с учетом столкновений. Аналогичные уравнения другими методами были получены Балеску [7] и Климонтовичем [8]. В качестве исходного возьмем неоднородное уравнение с членом столкновений типа Ленарда, осуществив для него преобразование $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \to \bar{v}, \bar{v}'$ и изменив нормировку функции распределения с n на единицу. Тогда оно примет вид

$$\frac{\partial F_1(t, x_1)}{\partial t} = \left[\frac{p_1^2}{2m}; F_1(t, x_1)\right] + [U(t, r_1); F_1(t, x_1)] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp_2 Q_{ij}(p_1, p_2) \left\{ \frac{\partial F_1(t, x_1)}{\partial p_{1j}} F_1(t, x_2) - \frac{\partial F_1(t, x_2)}{\partial p_{2j}} F_1(t, x_1) \right\}. \qquad (3)$$

$$Q_{ij}(p_1, p_2) = \frac{1}{8\pi^2} \int dk \delta(\bar{k}\bar{p}_1 - \bar{k}p_2) \frac{k_i k_j m n \Phi^2(k)}{|1 + mn\Phi(k)\Psi(\bar{\varkappa}, u)|^2}. \qquad (4)$$

$$\Psi(\bar{\varkappa}, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{u - u' - i\varepsilon} \frac{\partial F(\bar{\varkappa}, u')}{\partial u'},$$

$$F(u', \bar{\varkappa}) = \int dp F_1(p) \delta(u' - \bar{\varkappa}\bar{p}), \qquad (5)$$

где $x_i = \{r_1; p_i\}$ $\bar{\varkappa}$ — единичный вектор вдоль k, $u = \bar{\varkappa}p$, $\Phi(k)$ — Фурье-образ кулоновского потенциала. Поскольку последний член в (3) получен в предположении Боголюбова о том, что $F_2(t, x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2 | F_1)$, то это уравнение справедливо для времен $t > \tau_{\text{син}}$, где $\tau_{\text{син}}$ — время синхронизации бинарной функции распределения с F_1.

§ 1. Получение уравнения для функций Грина из линеаризованного кинетического уравнения

Предположим, что в равновесной системе адиабатически включается внешнее поле с возмущающим гамильтонианом

$$\delta H = \frac{n}{2\pi} e^{-iEt} \delta A(x) = \frac{n}{2\pi} \delta A(t, x).$$

Распределение Максвелла $F_1^0(p) = \frac{e^{-p^2/2m\theta}}{(2\pi m\theta)^{3/2}}$ является стационарным решением уравнения (3), ибо при этом $U(t, r)$ обращается в нуль. Поэтому будем искать уравнение для малых отклонений от равновесия $\delta F_1(t, x) = F_1(t, x) - F_1^0(p)$. Варьируя уравнение (3), найдем

$$\frac{\partial \delta F_1(t, x)}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m}, \delta F_1\right] + n \int [\Phi(|\bar{r} - r_2|) \delta F_1(t, x_2) \times$$

$$\times F^0(p)]\, dx_2 + \frac{\partial}{\partial p_i}\int dp_2 Q^0_{ij}(p, p_2)\left\{\frac{\partial F^0_1(p)}{\partial p_j}\delta F_1(t, x_2) + \right.$$

$$+ \frac{\partial \delta F_1(t, x)}{\partial p_j} F^0_1(p_2) - \frac{\partial \delta F_1(t, x_2)}{\partial p_{2j}} F^0_1(p) -$$

$$\left. - \frac{\partial F^0_1(p_2)}{\partial p_{2j}}\delta F_1(t, x)\right\} + \frac{n}{2\pi}[\delta A(t, x), F^0_1(p)], \qquad (6)$$

где Q^0_{ij} означает, что в общее выражение (4) вместо $F_1(t, x)$ подставлено $F^0_1(p)$. При вычислении (6) опустили равный нулю член с вариацией δQ_{ij}, ибо в δQ_{ij}, как и в Q_{ij}, имеется $\delta(\overline{kp_1} - \overline{kp_2})$, и эта вариация умножается под интегралом на

$$\left\{\frac{\partial F^0_1}{\partial \bar{p}_1} F^0_1(p_2) - \frac{\partial F^0_1}{\partial \bar{p}_2} F^0_1(p_1)\right\} \sim (\overline{kp_1} - \overline{kp_2}).$$

Символическое тождество $\int x\delta(x)\delta(x) \equiv 0$ дает требуемый результат.

Применим теорему о вариации среднего значения динамической величины, устанавливающую связь между вариационной производной по внешнему полю от функций распределения и функциями Грина в E-представлении. Аналитически она запишется в следующем виде:

$$\frac{\delta F(t, x)}{\delta A(t, y)} = \langle\langle A_x | A_y \rangle\rangle_E, \quad \frac{\delta A(t, x)}{\delta A(t, y)} = \delta(x - y). \qquad (7)$$

Применяя (7) к уравнению (6) и учитывая, что при данном выборе возмущающего поля $\delta F_1(t, x) = e^{-iEt}\delta F_1(x)$, получим уравнение для функции Грина:

$$-iE\langle\langle Ax_1 | A_y \rangle\rangle_E = \left[\frac{p_1^2}{2m}; \langle\langle A_{x_1} | A_y \rangle\rangle_E\right] +$$

$$+ n\frac{\partial F^0_1(p_1)}{\partial p_{1\alpha}}\int \frac{\partial \Phi(|r_1 - r_2|)}{\partial r_{1\alpha}}\left(\int \langle\langle A_{x_2} | A_y \rangle\rangle_E dp_2\right) dr_2 +$$

$$+ \frac{n}{2\pi}\frac{\partial \delta(x - y)}{\partial r_{1\alpha}}\frac{\partial F^0_1(p_1)}{\partial p_{1\alpha}} + \frac{\partial}{\partial p_{1\alpha}}\int dp_2 Q^0_{\alpha\beta}(p_1, p_2)\left\{\frac{\partial F^0_1(p_1)}{\partial p_{1\beta}} \times\right.$$

$$\times \langle\langle A_{x_2} | A_y \rangle\rangle_E + \frac{\partial \langle\langle A_{x_1} | A_y \rangle\rangle_E}{\partial p_{1\beta}} F^0_1(p_2) - \frac{\partial \langle\langle A_{x_2} | A_y \rangle\rangle_E}{\partial p_{2\beta}} \times$$

$$\left.\times F^0_1(p_2) - \frac{\partial F^0_1(p_2)}{\partial p_{2\beta}}\langle\langle A_{x_1} | A_y \rangle\rangle_E\right\}. \qquad (8)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением пространственно-однородных систем, в связи с чем в (8) произведем преобразование Фурье по пространству согласно формуле

$$\langle\langle A_{x_1} | A_y \rangle\rangle_E = G(r_1) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int G(k) e^{i\overline{kr}_1} dk. \qquad (9)$$

Тогда (8) перейдет в

$$-iEG(E, k, p_1, p') = -i\frac{\overline{kp}_1}{m} G(E, k, p_1, p') +$$

$$+ ik_\alpha n \frac{\partial F_1^0(p_1)}{\partial p_{1\alpha}} \Phi(k) \int G(E, k, p_2, p') dp_2 +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial p_{1\alpha}} \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta}(p_1, p_2) \left\{ \frac{\partial F_1^0(p_1)}{\partial p_{1\beta}} G(E, k, p_2, p') + \right.$$

$$+ \frac{\partial G(E, k, p_1, p')}{\partial p_{1\beta}} F_1^0(p_2) - \frac{\partial G(E, k, p_2, p')}{\partial p_{2\beta}} F_1^0(p_1) -$$

$$\left. - \frac{\partial F_1^0(p_2)}{\partial p_{2\beta}} G(E, k, p_1, p') \right\} + i \frac{k_\alpha n}{2\pi} \delta(p_1 - p') \frac{\partial F_1^0(p_1)}{\partial p_{1\alpha}}. \qquad (10)$$

Введя обозначения

$$\overline{M} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left\{ \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta}(p_1 p_2) \left[\left(\frac{\partial F^0(p_2)}{dp_{2\beta}} - \frac{\partial}{\partial p_\beta} F^0(p_2) \right) \right] \right\},$$

$$\mathscr{L} = n\bar{k} \frac{\partial F^0(p)}{\partial \bar{p}} \Phi(k) \int G(E, k, p, p') dp + \frac{n}{2\pi} \delta(p - p') \bar{k} \frac{\partial F^0(p)}{\partial \bar{p}}, \qquad (11)$$

$$L = i \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta}(p, p_2) \left\{ \frac{\partial G(E, k, p_2, p')}{\partial p_{2\beta}} F^0(p) - \frac{\partial F^0(p)}{\partial p_\beta} \times \right.$$

$$\left. \times G(E, k, p_2, p') \right\},$$

его можно привести к виду

$$\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m} \pm i\overline{M} \right) G(E, k, p, p') + \mathscr{L}(E, k, p, p') + L(E, k, p, p') = 0. \qquad (12)$$

Заметим, что член столкновений представляет собой поправку $\sim\varepsilon$, поэтому при $\varepsilon = 0$ получим из (10) уравнение для функции Грина в приближении самосогласованного поля, полученное и исследованное в [5]. Его решение $G^0(E, k, p, p') = (nc)^2 \frac{(\bar{k}\bar{p})(\bar{k}\bar{p}')}{2\pi (m\theta)^2} \Phi(k)$

$$\frac{\exp\left[-\frac{(p^2 + p'^2)}{2m\theta} \right]}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m} \right)\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}'}{m} \right)} \left\{ 1 + \frac{2kn\Phi(k)}{\sqrt{2\pi m\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-\zeta^2} d\xi}{E - \xi k \sqrt{\frac{2\theta}{m}}} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi m\theta} \frac{n(\bar{k}\bar{p}) ce^{-\frac{p^2}{2m\theta}} \delta(p - p')}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m} \right)} \qquad (13)$$

можно считать нулевым приближением нашего уравнения.

Прежде чем исследовать уравнение (12), необходимо вычислить в явном виде ядро Ленарда Q_{ij}.

§ 2. Связь между ядром Ленарда и ядром Ландау

Предварительно вычислим согласно (5) $F^0(\bar{\varkappa}, u')$ и $\Psi^0(\bar{\varkappa}, u)$, беря в качестве функции распределения распределение Максвелла по импульсам

$$F^0(u', \bar{\varkappa}) = c\int dp e^{-\frac{p^2}{2m\theta}} \delta(u' - \overline{\varkappa p}) = c\int du dp_\perp^2 \delta(u' - u) \times$$

$$\times e^{-\frac{u^2}{2m\theta}} e^{-\frac{p_\perp^2}{2m\theta}} = (2\pi m\theta)^{1/2} e^{-\frac{u'^2}{2m\theta}}.$$

$$\Psi^0(u, \bar{\varkappa}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du'}{u - u' - i\varepsilon} \frac{\partial}{\partial u'} \left\{ (2\pi m\theta)^{-1/2} e^{-\frac{u'^2}{2m\theta}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (m\theta)^{-3/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u' e^{-\frac{u'^2}{2m\theta}}}{u - u' - i\varepsilon} du'.$$

Поскольку $\varepsilon \to 0$, то можно брать предельное значение интеграла типа *а* Коши. Тогда

$$Re\Psi^0(u, \bar{\varkappa}) = -\frac{(m\theta)^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u' e^{-\frac{u'^2}{2m\theta}}}{u - u'} du',$$

$$Im\Psi^0(u, \bar{\varkappa}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (m\theta)^{-3/2} u e^{-\frac{u^2}{2m\theta}},$$

$$P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u' e^{-\frac{u'^2}{2m\theta}}}{u - u'} du' = -(2\pi m\theta)^{1/2} - uP \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - v},$$

где $v = \frac{u}{p_т}$, $p_т = \sqrt{2m\theta}$. Интеграл в $Re\Psi^0$ расходится при $u' = u$, поэтому, используя хорошо известную в теории обобщенных функций регуляризацию, найдем

$$P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - v} = e^{-v^2} P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} e^{-2vy}}{y} =$$

$$= e^{-v^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{y} (e^{-2vy} - e^{2vy}) dy. \qquad (14)$$

Полученный интеграл (14) не имеет особенностей и может быть вычислен как интеграл по параметру v, либо с помощью теории функциональных рядов. В последнем случае:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{y}\left(e^{-2vy}-e^{2vy}\right)du = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2v)^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n}\,dy =$$

$$= -2\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} = -2\sqrt{\pi}\int_0^v e^{x^2}\,dx. \qquad (15)$$

Операции перестановки порядка интегрирования и суммирования законны, ибо полученный ряд сходится всюду на $(-\infty, \infty)$. Учитывая (14) и (15), получим $Re\Psi^0$ в виде

$$Re\Psi^0(\bar{\varkappa}, u) = (m\theta)^{-1}\left\{1-\left(\frac{u}{p_т}\right)e^{-\left(\frac{u}{p_т}\right)^2}\int_0^u e^{\left(\frac{x}{p_т}\right)^2}dx\right\}. \qquad (16)$$

Далее, следуя Ленарду, можно осуществить в (4) интегрирование по $|\bar{k}|$. Тогда в наших обозначениях:

$$Q_{ij}^0(p_1, p_2) = \frac{e^4mn}{|\bar{p}_1-\bar{p}_2|}\int_0^{2\pi} d\varphi\varkappa_i\varkappa_j\cdot\frac{Im\left\{\Psi^0\ln\left(1+\frac{\theta^2}{4\pi mne^6\Psi^0}\right)\right\}}{Im\Psi^0}, \qquad (17)$$

где φ определяет положение $\bar{k}$ в плоскости, перпендикулярной $(\bar{p}_1-\bar{p}_2)$, $\bar{\varkappa}$— единичный вектор в той же плоскости. Введем

$$\chi^0 = m\theta\Psi^0,\ B^2 = \frac{\theta^3}{4\pi ne^6} = (4\pi nr_d^3)^2 \gg 1.$$

При этом из (17), (16) и $Im\Psi^0$ получим следующее:

$$Q_{ij}^0(p_1, p_2) = \frac{e^4mn}{|\bar{p}_1-\bar{p}_2|}\int_0^{2\pi} d\varphi\varkappa_i\varkappa_j\,\frac{Im\left\{\chi^0\ln\left(1+\frac{B^2}{x^0}\right)\right\}}{Im\,\chi^0}, \qquad (18)$$

$$Re\chi^0 = 1-2\left(\frac{u}{p_т}\right)e^{-\left(\frac{u}{p_т}\right)^2}\int_0^{\frac{u}{p_т}} e^{x^2}dx,$$

$$Im\chi^0 = -\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{p_т}\right)e^{-\left(\frac{u}{p_т}\right)^2}. \qquad (19)$$

Мы видим, что χ^0 зависит от $z = \frac{u}{p_т}$. Исследуем ее поведение при больших и малых z.

$Re\chi^0$ — функция четная.

$$Re\chi^0 = 1-2z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{2^nz^{2n+1}}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z^2)^n}{(2n-1)!!},$$

где $(-1)!! = 1$. Этот ряд сходится на всей числовой оси. При малых $Re\chi^0 \cong 1-2z^2 \to 1$. При больших z удобнее следующее разложение:

$$Re\chi^0 = 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\,(2z)^{2n}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\,(2z)^{2n}},$$

т. е. при больших z $R\chi^0 \cong -\frac{1}{2z^2} \to 0$.

Для функции $e^{-z^2}\int\limits_0^z e^{x^2}dx$ существуют таблицы, поэтому $Re\chi^0$ можно вычислить при любых значениях $\frac{u}{p_т}$. Из них следует, что $Re\chi^0$ быстро спадает от единицы при нуле, делает несколько небольших по амплитуде осцилляций порядка 0,2 и менее и стремится к нулю со стороны отрицательных значений как $1/2z^2$.

$Im\chi^0$ — функция нечетная.

$$Im\chi^0 = -\sqrt{\pi}z \to 0, \quad \underset{z\to\infty}{Im\chi^0} = -\frac{\sqrt{\pi}z}{e^{z^2}} \to 0.$$

Таким образом, $Im\chi^0$ линейно спадает от нуля при малых z, уменьшается вплоть до $-\sqrt{\frac{\pi}{2e}}$ при $z = \frac{1}{2}$ и снова экспоненциально стремится к нулю, оставаясь все время отрицательной при $z > 0$.

Мы приходим к выводу, что всегда $|Re\chi^0| \leqslant 1$, $|Im\chi^0| < 1$. Поэтому в (18) под знаком логарифма можно пренебречь единицей, ибо $B^2 \gg 1$. Получим

$$\underset{(11,22)}{Q^0_{ij}}(p_1, p_2) = \frac{e^4mn}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\varkappa_i\varkappa_j \frac{Im\left\{\chi^0 \ln\left(\frac{B^2}{x_0}\right)\right\}}{Im\chi^0}. \tag{20}$$

Если взять лишь значения $Re\chi^0$ и $Im\chi^0$ при $z \to 0$, что означает $u \ll p_т$, то $Re\chi^0 = 1$, $Im\chi^0 = 0$ и ядро Ленарда (18), (20) перейдет после интегрирования по углу в ядро интеграла столкновений, полученное Ландау в [2], а именно:

$$\underset{(11,22)}{Q^0_{ij}}(p_1, p_2) = \frac{2\pi ne^4 m}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}\ln B. \tag{21}$$

Напомним, что (21) получено в системе координат, где $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\|\bar{e}_3$.

Преобразуя тензор Q^0_{ij} в произвольную систему, найдем

$$Q^0_{ij}(p_1, p_2) = 2\pi mne^4 \ln Bg^{-3}\{g^2\delta_{ij} - g_ig_k\}. \tag{22}$$

Точное представление для Q^0_{ij} будет следующее:

$$\underset{(11,12)}{Q^0_{ij}}(p_1, p_2) = \frac{e^4mn}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\varkappa_i\varkappa_j\left\{\ln\frac{B^2}{\sqrt{(Re\chi^0) + (Im\chi^0)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{Re\chi^0}{Im\chi^0}\operatorname{arctg}\frac{Im\chi^0}{Re\chi^0}\right\}. \tag{23}$$

Второй член под интегралом (23) при больших и малых z равен единице, а при прочих z мало отличается от нуля, причем принимает лишь отрицательные значения, т. е. по абсолютной величине он всегда не превышает единицы. Что касается первого члена, то его знаменатель

при малых z равен единице, а далее монотонно убывает, причем на ∞ как $\frac{1}{2z^2} \to 0$. Поэтому ядро типа Ландау не учитывает этого логарифмического роста при больших z, хотя ошибка от замены (23) на (22) может и не быть большой, ибо ядро умножается под интегралом на быстро убывающую на ∞ функцию Грина (или функцию распределения в случае кинетических уравнений).

§ 3. Получение функций Грина, затухания и частот системы

Решение уравнения (12) символически можно записать в виде

$$G(E, k, p, p') = -\frac{\mathscr{L} + L}{E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m} + i\widehat{M}}. \tag{24}$$

Оценим порядки величин $\mathscr{L}$ и L по ε. Для этого перейдем в уравнении (12) к безразмерным величинам, введя $\tilde{p} = \frac{p}{p_т}$,

$$\tilde{k} = \frac{k}{kd}, \quad k_d^2 = r_d^{-2}. \text{ Тогда } \mathscr{L} \sim \frac{e^2 n}{p_т k_d},$$

$$Q_{ij}^0 \sim mne^4 p_т^{-1} \ln B, \text{ следовательно } L \sim mne^4 p_т^{-3} \ln B,$$

$$\frac{L}{\mathscr{L}} \sim me^2 k_d p_т^{-2} \ln B = \frac{e^2 \ln B}{\theta r_d} \sim \varepsilon \ln (4\pi n r_d^3).$$

Поскольку $\ln(4\pi n r_d^3)$ порядка нескольких единиц, а ε мало, то в (24) можно пренебречь L по сравнению с $\mathscr{L}$. Тогда

$$G(E, k, p, p') = \frac{\mathscr{L}}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m} + iM\right)}. \tag{25}$$

Иными словами, G в уравнении (12) первые два члена имеют порядок $\frac{G}{t}$, а последний $\frac{G}{\tau_{рел}}$, где $\tau_{рел} \sim \frac{nr_d^3}{\omega_0 \ln(4\pi r_d^3)}$. Поэтому выражение (25) верно для времени $t < \tau_{рел}$. Вместе с условием синхронизации корреляционных функций Боголюбова приходим к выводу, что G в форме (25) справедливо для интервала $\tau_{син} < t < \tau_{рел}$.

Учет члена столкновений благодаря наличию $i\widehat{M}$ в знаменателе (25) дает дополнительное затухание. Так как $\widehat{M} \sim \varepsilon$, то ищем решение (25) в виде $G = G^0 + G^1$, где G^0 — решение уравнения типа Власова. Для $G^1 \sim \varepsilon$ получим уравнение

$$\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right) G^1(E, k, p, p') + \mathscr{L} + i\widehat{M} G^0(E, k, p, p') = 0. \tag{26}$$

Проинтегрируем его по p'

$$\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right) G^1(E, k, p) + \mathscr{L}(E, k, p) + i\widehat{M} G^0(E, k, p) = 0. \tag{27}$$

$$G^0(E, k, p) = z(E, k)\frac{(kp)\, e^{-\left(\frac{p}{p_т}\right)^2}}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right)},$$

$$z(E, k) = \frac{nc}{2\pi m\theta}\,\frac{1}{\left\{1 - \frac{2knΦ(k)}{\sqrt{2\pi m\theta}}\, B(E, k)\right\}}. \tag{28}$$

Вводя $f^1(E, k) = \int G^1(E, k, p)\, dp$, после деления (27) на $\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right)$ и последующего интегрирования по p, найдем

$$f^1(E, k) = -i\int \frac{\hat{M}G^0\, dp}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right)} \Bigg/ \left\{1 - \frac{2knΦ(k)}{\sqrt{2\pi m\theta}}\, B(E, k)\right\}. \tag{29}$$

Для получения явного вида $f^1(E, k)$ необходимо знать результат действия оператора $\hat{M}$ на G^0. Согласно (11)

$$\hat{M}G^0 = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left\{G^0(E, k, p)\, V_1^\alpha(p) - \frac{\partial G^0(E, k, p)}{\partial p_\beta}\, V_2^\alpha(p)\right\} \tag{30}$$

$$V_1^\alpha(p) = \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta}\frac{\partial F^0(p_2)}{\partial p_{2\beta}}, \quad V_2^{\alpha\beta}(p) = \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta} F^0(p_2). \tag{31}$$

В целях удобства вычислений Q^0_{ij}, в (22) обозначим $A = 2\pi mne^4 \ln B$. Тогда в системе координат, где $p \parallel e_3$,

$$V_1^3(p) = \frac{4AV(p)}{p_т\sqrt{\pi}(p)}, \quad V_2^{11}(p) = V_2^{22}(p) =$$

$$= \frac{A}{p}\,Φ\left(\frac{p}{p_т}\right) + \frac{Ap_т V(p)}{p^2\sqrt{\pi}}, \quad V_2^{33}(p) = -\frac{2Ap_т V(p)}{p^2\sqrt{\pi}},$$

где

$$V(p) = e^{\left(-\frac{p}{p_т}\right)^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{Φ\left(\frac{p}{p_т}\right)}{\left(\frac{p}{p_т}\right)}.$$

Остальные компоненты обращаются в нуль. Переходя в произвольную систему координат, найдем

$$V_1'^\alpha(p) = \frac{4AVp_\alpha}{p_т\sqrt{\pi}p^2}, \quad V_2'^{\alpha\beta} = V_2^{11}\delta_{\alpha\beta} + (V_2^{33} - V_2^{11})\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} =$$

$$= \left\{\frac{A}{p}\,Φ\left(\frac{p}{p_т}\right) + \frac{Ap_т}{p^2\sqrt{\pi}}\right\}\delta_{\alpha\beta} - \left\{\frac{A}{p}\,Φ\left(\frac{p}{p_т}\right) + \frac{3Ap_т V}{p^2\sqrt{\pi}}\right\}\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}. \tag{32}$$

Здесь $Φ(x)$ — интеграл ошибок. Подставляя (32) в (30) и интегрируя по углам в сферической системе p, φ, θ, получим

$$\alpha = \int \frac{\hat{M}G^0\, dp}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right)} = \frac{8\pi AzEk^2}{3m}\int_0^\infty \frac{Φ\left(\frac{p}{p_т}\right) pe^{-\left(\frac{p}{p_т}\right)^2}}{\left(\frac{k^2p^2}{m^2} - E^2\right)}\, dp -$$

$$-\frac{16\pi AzEk^4p_т^2}{3m}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi\left(\frac{p}{p_т}\right)pe^{-\left(\frac{p}{p_т}\right)^2}}{\left(\frac{k^2p^2}{m^2}-E^2\right)^3}dp+\frac{32\sqrt{\pi}AzEk^4p_т}{3m^3}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2\left(\frac{p}{p_т}\right)^2}p^2\,dp}{\left(\frac{k^2p^2}{m^2}-E^2\right)^3}. \tag{33}$$

При больших k интегралы в (33) расходятся. При малых k можно разложить знаменатели подынтегральных выражений. Учтем лишь вклад от $p \ll p_т$, ибо при этом условии из (20) получено использованное нами в вычислениях ядро (22). Тогда в низшем приближении по k: $\alpha \doteq \frac{4\pi Azk^2p_т^2}{3mE^3}$. Подставляя в (29), находим

$$f^1(E, k) = -if^0(E, k)\left\{\frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ne^4}{m^{1/2}\theta^{3/2}}\frac{\ln B}{E\mathscr{E}}\right\},$$

$$f^0(E, k) = \frac{nk^2}{2\pi mE^2\mathscr{E}}. \tag{34}$$

Заметим, что f^0 и f^1 являются асимптотическими значениями при малых k. Значение f^0 взято из общего выражения в [5] с учетом того, что

$$B(E, k) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2m}}\frac{k}{E^2},\quad \mathscr{E} = 1-\frac{\omega_0^2}{E^2}.$$

Фурье-образ по пространству от полной функции Грина $\langle\langle \rho(\bar{r})\rho(\bar{r}')\rangle\rangle$ в E-представлении будет следующий:

$$f(E, k) = f^0 + f^1 = f^0\left(1 - i\frac{\nu_{эфф}}{E\mathscr{E}}\right) = \frac{f^0}{\left(1+i\frac{\nu_{эфф}}{E\mathscr{E}}\right)}, \tag{35}$$

$$\nu_{эфф} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{ne^4\ln B}{m^{1/2}\theta^{3/2}}.$$

Данное $\nu_{эфф}$ совпадает с результатами [9] для частот, меньших ω_0, где и справедливо наше рассмотрение.

Полагая $E=\omega+i\gamma$, находим, что формально при малых k для плазменных волн

$$\gamma = -\gamma_л + \gamma_{ст} = -\gamma_л - \frac{\nu_{эфф}}{2} = -\gamma_л - \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon\omega_0\ln(4\pi nr_d^3)}{24\pi^2}, \tag{36}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\nu_{эфф}^2}{4} = \omega_0^2\left(1-\frac{\varepsilon^2\ln^2(4\pi nr_d^3)}{288\pi^3}\right), \tag{37}$$

где $\gamma_л$ — затухание Ландау. Как и следовало ожидать, $\gamma_{ст}\sim\varepsilon$, т. е. $\gamma_{ст} \ll \omega$. Отметим, что поскольку мы рассматривали движение частиц в фоне, то ω и γ суть частота колебаний и затухание при столкновении частиц на фоне.

Следующее приближение по k дает поправку к частоте Власова и затухание с зависимостью от волнового вектора наряду с затуханием Ландау:

$$\gamma' = \gamma_л - \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon\omega_0\ln(4\pi nr_d^3)}{24\pi^2}\left(1+\frac{3\theta k^2}{m\omega_0^2}\right),$$

$$\omega'^2 = \omega_0^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2 \ln^2 (4\pi n r_d^3)}{288\pi^3} \right] + \frac{3\theta_k^2}{m} \cdot \left[1 - \frac{\varepsilon^2 \ln^2 (4\pi n r_d^3)}{144\pi^3} \right].$$

Представляет интерес аналогичное рассмотрение для более точного ядра (23), учитывающего вклад от всех импульсов, о чем будет рассказано в следующей работе.

Автор глубоко признателен акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе, а также проф. Ю. Л. Климонтовичу и Б. И. Садовскому за весьма полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. ЖЭТФ, 8, 291, 1938.
2. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 7, 203, 1937; ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
3. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1947.
4. Зубарев Д. Н. «Успехи физич. наук», 71, 1, 1960.
5. Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И. ЖЭТФ, 43, 8, 1962.
6. Lenard A. Ann. of Phys., 10, 3, 1960.
7. Balescu R. Phys. of Fluids, 3, 52, 1960.
8. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд-во МГУ, 1964.
9. Силин В. П. ЖЭТФ, 41, 3, 9, 1961.

Поступила в редакцию
23. 2 1966 г.

Кафедра
квантовой статистики