Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1967

УДК 530.145

О. С. ПАВЛОВА, А. М. ХАПАЕВ

# ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО РОТАТОРА

Методами квантовой теории исследуется излучение релятивистского ротатора с ориентированным спином, проводится сравнение с синхронным излучением.

В настоящей работе рассматривается излучение релятивистского ротатора, например электрона, движущегося по окружности постоянного радиуса. Такое движение электрона может служить некоторой моделью для описания свойств синхротронного излучения (см. [1]) и вместе с тем позволяет достаточно просто отсчитать некоторые его свойства. В отличие от [1] мы рассмотрим излучение электрона с ориентированным спином.

## Волновые функции

Для решения задачи выберем орбиту электрона в виде окружности радиуса $R$ и потребуем, чтобы волновая функция подчинялась уравнению Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [c(\vec{\alpha}\vec{p}) + \rho_3 mc^2]\, \Psi, \tag{1}$$

а также была бы собственной для коммутирующих с гамильтонианом операторов проекции импульса и полного момента на ось $z$. При выполнении этих условий волновая функция в цилиндрической системе координат имеет вид [3]

$$\Psi = Ne^{-icKt+ik_3z+il\varphi} \begin{pmatrix} C_1 \\ iC_2e^{i\varphi} \\ C_3 \\ iC_4e^{i\varphi} \end{pmatrix};$$

$$K^2 = k_0^2 + k_3^2 + \frac{l(l+1)}{R^2}. \tag{2}$$

Спиновые коэффициенты $C_i$ подчинены уравнению Дирака и связаны между собой условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{4} |C_i|^2 = 1. \tag{3}$$

Однако этих условий оказывается недостаточно для их полного определения, поэтому мы введем четверной оператор, коммутирующий с гамильтонианом и характеризующий поляризацию электронного спина по отношению к оси $z$, перпендикулярной к плоскости орбиты вращения [2, 3]:

$$\Pi_{12} = m_0 c\sigma_3 + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{p}]_3.$$

Считая волновую функцию собственной функцией этого оператора

$$\Pi_{12}\Psi = c\hbar k\zeta\Psi \tag{4}$$

и решая совместно уравнения (1), (3) и (4), получаем коэффициенты $C_i$ и нормировочный множитель в виде

$$C_{1,3} = \frac{A}{2}\left(\sqrt{1+\frac{k_3}{K}} \pm \zeta\sqrt{1-\frac{k_3}{K}}\right);$$

$$C_{2,4} = \mp\frac{B}{2}\left(\sqrt{1+\frac{k_3}{K}} \mp \zeta\sqrt{1-\frac{k_3}{K}}\right);$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l+1}{l+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1+\zeta\frac{k_0}{k}}{1+\zeta\frac{k_0}{(2l+1)k}}},$$

$$B = \frac{\zeta}{2}\sqrt{\frac{l}{l+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1-\zeta\frac{k_0}{k}}{1+\zeta\frac{k_0}{(2l+1)k}}}, \tag{5}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}}\sqrt{\frac{ll'}{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l'+\frac{1}{2}\right)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'\frac{k_0}{k}\frac{1}{2l+1}}}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k_0}{k}\frac{1}{2l+1}}},$$

где $k=\sqrt{K^2-k_3^2}$ и $\zeta=\pm 1$ характеризуют состояние поляризации электронного спина по отношению к оси $z$: по оси $z$ и против оси $z$ соответственно.

## Спонтанные переходы и приближения в матричных элементах

Интенсивность излучения при спонтанных переходах электрона из состояния $l, \zeta$ в состояние $l'=l-\nu$, $k_3'\zeta'$

$$W_i = \frac{ce^2}{2\pi}\int d^3\varkappa\,\delta(K-K'-\varkappa)\,S_i$$

связана с величинами $S_i$, характеризующими поляризацию излучения.

В частности, для $\sigma$ и $\pi$ компонентов линейной поляризации:

$$S_\sigma = |\bar{\alpha}_1|^2,$$

$$S_\pi = |\bar{\alpha}_2|^2 \cos^2\theta + |\bar{\alpha}_3|^2 \sin^2\theta - 2|\bar{\alpha}_1||\bar{\alpha}_2| \sin\theta \cdot \cos\theta, \tag{6}$$

причем матричные элементы матриц Дирака $\bar{\alpha}_n$ имеют вид

$$\bar{\alpha}_n = \int \Psi^{1+} e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}} \alpha_n \Psi \, d^3x.$$

Полагая, что в начальном состоянии импульс $k_3=0$, с помощью формул (2) и (5) находим

$$|\bar{\alpha}_{1,2}|^2 = \frac{1}{8}\left(1 + \zeta\zeta' \frac{k'}{K'}\right)\left[\left(1 - \zeta\zeta' \frac{k_0^2}{kk'}\right)(J^2_{\nu+1} + J^2_{\nu-1}) + \right.$$
$$\left. + \left(\zeta' \frac{k_0}{k} - \zeta \frac{k_0}{k}\right)(J^2_{\nu+1} - J^2_{\nu-1}) \mp 2\zeta\zeta' \frac{ll'}{kk'R^2} J_{\nu+1}J_{\nu-1}\right]$$
$$|\bar{\alpha}_3|^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \zeta\zeta' \frac{k'}{K'}\right)\left[1 + \frac{\zeta\zeta'}{kk'}\left(k_0^2 + \frac{ll'}{R^2}\right)\right] J^2_\nu \tag{7}$$

$$|\bar{\alpha}_2||\bar{\alpha}_3| = \frac{\zeta}{8}\frac{k_3'}{K'}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{l}{k} + \frac{l'}{k'}\right)(J_{\nu+1} + J_{\nu-1}) + \right.$$
$$\left. + \zeta\zeta' \frac{\nu \cdot k_0}{kk'R}(J_{\nu+1} - J_{\nu-1})\right] J_\nu,$$

где аргумент функций Бесселя $J_\nu(x)$, равный

$$x = \nu \cdot \beta \cdot \sin\theta.$$

Частота излучаемых фотонов определяется из закона сохранения энергии

$$\varkappa = K - K' \cong K^2\beta^2 \frac{\nu}{l}\left[1 - \frac{\nu}{2l}(1 - \beta^2 \sin^2\theta)\right]. \tag{8}$$

Частота излучения ротатора совпадает с соответствующей частотой излучения релятивистского электрона в магнитном поле только в классическом приближении (см. [6]). Квантовые поправки оказываются различными; причем в случае ультрарелятивистских скоростей движения поправки к частоте излучения ротатора оказываются исчезающе малыми.

При выводе формул (7) и (8) и в дальнейшем для упрощения матричных элементов будем интересоваться только случаем движения по окружности макроскопического радиуса $R$ с ультрарелятивистскими скоростями. При таком движении $l \gg 1$, $l(l+1) \cong l^2$, $N = 1 + 0\left(\frac{1}{l}\right)$, считая, что $\nu = l - l' \ll l$, ограничимся во всех разложениях без переворота спина первыми членами по $\frac{\nu}{l}$. Вероятность перехода с переворотом спина $\zeta' = -\zeta$ пропорциональна $\left(\frac{\nu}{l}\right)^2$.

При вычислении интегральной интенсивности нам понадобится аппроксимация функций Бесселя цилиндрическими функциями $K$ [6]

$$\begin{gathered} I_\nu(\nu\beta\sin\theta)=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{\nu}{3}\cdot\varepsilon^{3/2}\right),\\ I'_\nu(\nu\beta\sin\theta)=\frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{\nu}{3}\cdot\varepsilon^{3/2}\right),\\ \varepsilon=1-\beta^2\sin^2\theta. \end{gathered} \tag{9}$$

## Интенсивность излучения

С помощью формул (6), (7) и описанных выше приближений нетрудно вычислить линейные компоненты излучения без изменения ориентации спина электрона:

$$dW_\sigma^{\uparrow\uparrow}=c\frac{e^2\beta^2}{R^2}\nu^2\left(I'^2_\nu-\zeta\frac{\nu}{l}\cdot\frac{k_0}{k}\cdot\frac{\beta}{\sin\theta}I_\nu I'_\nu\right)d\Omega,$$

$$dW_\pi^{\uparrow\uparrow}=\frac{ce^2\beta^2}{R^2}\nu^2\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\theta}{\beta^2}I_\nu^2+\frac{\nu}{l}\beta^2\cos^2\theta I_\nu^2\right)d\Omega.$$

Учитывая (9), можно просто провести интегрирование по спектру излучения

$$dW_\sigma^{\uparrow\uparrow}=\frac{ce^2}{R^2}\left(\frac{7}{16}\varepsilon^{-5/2}-\frac{\zeta}{l}\frac{k_0}{k}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\frac{35}{32}\varepsilon^{-9/2}\right)d\Omega,$$

$$dW_\pi^{\uparrow\downarrow}=\frac{ce^2}{R^2}\left(\frac{5}{16}\operatorname{ctg}^2\theta\,\varepsilon^{-7/2}+\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{16}{3\sqrt{3}}\cdot\varepsilon^{-5}\right)d\Omega.$$

Наконец, интегрируя по сферическим углам вылета фотона $\theta$ и $\varphi$ с помощью формулы (4)

$$\int_0^\pi\frac{\sin\theta\cos^s\theta\,d\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^k}=A\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{(a^2+x^2)^k}=\frac{A}{2}(a^2)^{-k+\frac{s+1}{2}}B\left(\frac{s+1}{2};\ k-\frac{s+1}{2}\right)$$

получаем интегральную интенсивность излучения компонентов линейной поляризации:

$$\begin{gathered} W_\sigma^{\uparrow\uparrow}=W_{\text{кл}}\left[\frac{7}{8}-\zeta\frac{3}{2}\frac{\hbar}{mcR}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right],\\ W_\pi^{\uparrow\uparrow}=W_{\text{кл}}\left[\frac{1}{8}+\frac{5}{16\sqrt{3}}\cdot\frac{\hbar}{mcR}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right]. \end{gathered} \tag{10}$$

Отсюда, полная глобальная величина интенсивности излучения равна

$$W_{\text{глоб}}=W_{\text{кл}}\left[1+\frac{5\sqrt{3}}{48}\left(1-\zeta\frac{24\sqrt{3}}{8}\right)\xi\right], \tag{11}$$

???

где

$$W_{\text{кл}}=\frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4,\quad \xi=\frac{\hbar}{mcR}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2.$$

Из формул (10) и (11) следует, что в случае поляризации спина электрона вдоль оси $z\cdot W_\sigma^{\uparrow\uparrow}$ компонент излучения зависит от начальной ориентации спина, причем эта зависимость входит в члены, пропорциональные первой степени постоянной Планка $\hbar$. Сравнение полученных результатов с синхротронным излучением [3] приводит к выводу, что они имеют один и тот же вид, но числовые коэффициенты при квантовых поправках несколько отличаются. В работе [1] подобный расчет проведен с одной волновой функцией ($\zeta=1$ в нашем случае); приведенный результат ошибочно принимается за полную мощность излучения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Иогансен Л. В. ЖЭТФ, **46**, 313, 1959.
2. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **153**, 1052, 1963.
3. Тернов И. М., Баунов В. Г., Рзаев Р. А. ЖЭТФ, **46**, 375, 1964.
4. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов и рядов. М., Физматгиз, 1963.
6. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. М., ГИТТЛ, 1949.



Поступила в редакцию
1. 3 1966 г.



Кафедра
теоретической физики