Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1967

УДК 62—501:621.372.061

К. Ф. ТЕОДОРЧИК, Л. Т. ФИЛИМОНОВ

КОРНЕВЫЕ КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены корневые признаки предельной устойчивости линейных систем, часть полюсов передаточных функций которых лежит на мнимой оси.

В теории абсолютной устойчивости систем, состоящих из линейной части, замкнутой на нелинейный элемент, кроме основного случая, когда все полюсы передаточной функции линейной части

$$W_0(s) = \frac{Q_m(s)}{P_n(s)} \tag{1}$$

расположены в левой полуплоскости комплексного переменного, рассматриваются особые случаи, когда часть полюсов системы (1) лежит на мнимой оси *. В этих случаях абсолютная устойчивость нелинейной системы возможна лишь тогда, когда линейная часть системы обладает свойством предельной устойчивости [1].

Линейная система типа (1), часть полюсов которой лежит на мнимой оси, обладает предельной устойчивостью, если при замыкании ее на линейный усилитель, со сколь угодно малым положительным коэффициентом усиления ε, все корни, выходящие из полюсов, лежащих на мнимой оси, смещаются в левую полуплоскость. Очевидно, это эквивалентно требованию, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы

$$P_n(p) + \varepsilon Q_m(p) = 0 \tag{2}$$

при ε, увеличивающемся от нуля, было гурвицево.

Это определение дает наиболее прямой и общий критерий предельной устойчивости. Так, если

$$W_0(s) = \frac{s+1}{(s^2+1)(s+2)},$$

то (2) дает $p^3+2p^2+(1+\varepsilon)p+(2+\varepsilon)=0$. Так как все коэффициенты этого уравнения положительны и предпоследний детерминант Гурвица $\Delta_2=a_1a_2-a_3=\varepsilon$, то замкнутая система устойчива при любом $\varepsilon>0$.

* В этих случаях линейная часть системы принадлежит к негрубым по А. Андронову и Л. Понтрягину системам, осуществимым физически лишь приближенно [2].

Перейдем к рассмотрению корневых критериев предельной устойчивости. Докажем, во-первых, что предельная устойчивость невозможна, если на мнимой оси лежит хотя бы один полюс кратности более двух. Действительно, теория траектории корней доказывает [3], что из n-кратного начального полюса при $\varepsilon>0$ выходят n нечетных траекторий корней, образующих друг с другом углы

$$\varphi_N = \frac{N\pi}{n},\ N = \pm 1, \pm 3, \ldots \tag{3}$$

Если $n>2$, то невозможно расположить такой n-кратный полюс на мнимой оси так, чтобы все корни выходили из него влево. Рассмотрим описываемые в литературе типы линейных систем, допускающих предельную устойчивость.

1. **Нулевой полюс в начале координат.** Уравнение (2) принимает в этом случае вид

$$pP_{n-1}(p) + \varepsilon Q_m(p) = 0,\ \varepsilon > 0, \tag{4}$$

в котором $P_{n-1}(p)$ гурвицев полином, т. е. все полюса, кроме нулевого, лежат в левой полуплоскости. Нули же (корни $Q_m(p)=0$) могут лежать на всей комплексной плоскости. При этих условиях, согласно основному фазовому уравнению траектории корней *, из нулевого полюса при $\varepsilon>0$ корень выходит влево (см. стрелку на рис. 1), если справа от него на действительной оси совсем нет действительных нулей системы или их число четно [3 и 4].

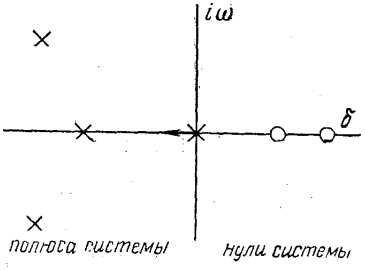

Рис. 1

Таким образом, необходимым и достаточным условием предельной устойчивости систем с одним полюсом в начале координат (4) является требование, чтобы на положительной действительной полуоси лежало четное число нулей системы (корней $Q_m(p)=0$).

2. **На мнимой оси лежит одна пара комплексно-сопряженных полюсов.** Уравнение (2) принимает в этом случае вид

$$(p^2 + \omega_0^2)\, P_{n-2}(p) + \varepsilon Q_m(p) = 0. \tag{6}$$

Согласно (5), для предельной устойчивости в этом случае необходимо и достаточно, чтобы с увеличением ε от нуля из пары чисто мнимых полюсов выходили корни в направлениях, образующих с положительным направлением действительной оси углы $\pm\alpha$, удовлетворяющие условию

$$\frac{\pi}{2} < |\alpha| < \frac{3\pi}{2}. \tag{7}$$

Поясним сказанное примером. На рис. 2 изображено расположение полюсов и нулей системы типа 2, передаточная функция которой имеет

---

* Уравнение это имеет вид (см. рис. 2)

$$\sum_1^n \varphi_r - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, \tag{5}$$

где для четных траекторий ($\varepsilon<0$) $N=0, \pm 2, \ldots$, а для нечетных ($\varepsilon>0$) $N=\pm 1, \pm 3, \ldots$

вид

$$W_0(s) = \frac{s+1}{s^2+1}.$$

Согласно (5), угол α выхода корня из верхнего мнимого полюса при $\varepsilon>0$ связан с углами, образованными положительной действительной осью и проведенными в рассматриваемый полюс из остальных полюсов и нулей прямыми (см. рис. 2), соотношением

$$\alpha = N\pi - \sum_3^n \varphi_\nu + \sum_1^m \psi_\mu, \tag{8}$$

где $N = \pm 1, \pm 3 \ldots$

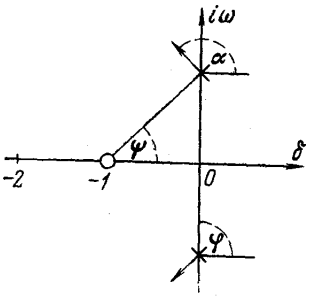

Рис. 2

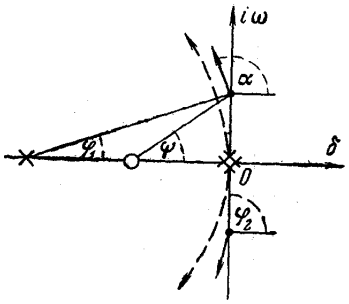

Рис. 3

В рассматриваемом случае это дает (см. рис. 2)

$$\alpha = \pi - \varphi + \psi = \pi - \frac{\pi}{2} + \psi = \frac{\pi}{2} + \psi,$$

что при $0<\psi<\pi$ удовлетворяет условию предельной устойчивости (7).

3. **Двойной полюс в начале координат.** Уравнение (2) имеет вид

$$p^2 P_{n-2}(p) + \varepsilon Q_m(p) = 0. \tag{9}$$

На этот случай можно смотреть как на предел, к которому стремится система типа 2 при неограниченном уменьшении расстояния между парой чисто мнимых полюсов. Поэтому для предельной устойчивости систем типа 3 необходимо и достаточно, чтобы все прочие полюсы и нули давали в начале координат

$$\sum_3^n \varphi_\nu - \sum_1^m \psi_\mu = N\pi, \quad N = 0, \pm 2, \ldots \tag{10}$$

(это обеспечивает выход пары комплексно-сопряженных корней из двойного полюса в направлении положительной и отрицательной мнимой оси (см. рис. 3)) и чтобы эта пара корней при возрастании ε от нуля уходила влево. Это будет иметь место, если соответствующая система типа 2, чисто мнимые полюса которой расположены в местах, отмеченных на рис. 3 жирными точками и отстоящих от начала координат на расстоянии малом по сравнению с остальными полюсами и нулями, была предельно устойчива, т. е. удовлетворяла условию (7).

4. **Система имеет на мнимой оси две пары совпадающих чисто мнимых полюсов.** Соответствующее уравнение (2) имеет вид

$$(p^2 + \omega^2)^2 P_{n-4}(p) + \varepsilon Q_m(p) = 0. \tag{11}$$

Заметим, что в отсутствии не лежащих на мнимой оси полюсов и нулей система при $\varepsilon>0$ неустойчива (см. рис. 4). Поэтому необходимым и достаточным условием предельной устойчивости является требование, чтобы при наличии прочих полюсов и нулей звезды траектории (рис. 4) поворачивались на углы $\pm\frac{\pi}{2}$ и выходящие из них траектории загибались влево. На рис. 5 показан простейший случай такого расположения, соответствующий характеристическому уравнению

$$(p^2+1)^2+\varepsilon p(p+1)^2=0 \tag{12}$$

или

$$p^4+\varepsilon p^3+2(1+\varepsilon)p^2+\varepsilon p+1=0.$$

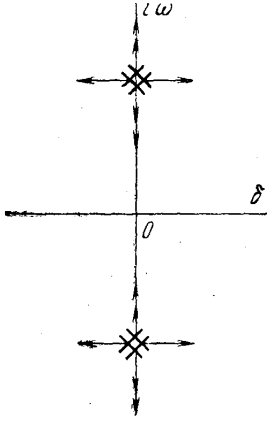

Рис. 4

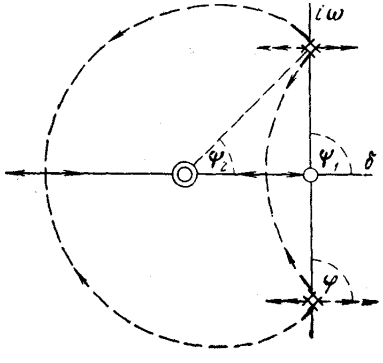

Рис. 5

Так как все коэффициенты этого уравнения положительны и предпоследний детерминант Гурвица $\Delta_3=\varepsilon>0$ при $\varepsilon>0$, то рассматриваемая система предельно устойчива [5]. Для нее выполняется указанное условие предельной устойчивости:

$$\pi-2\varphi+\psi_1+2\psi_2=\pi-\pi+\frac{\pi}{2}+2\frac{\pi}{4}=\pi,$$

что соответствует повороту звезды двойного полюса на угол $\frac{\pi}{2}$.

Очевидно, это условие выполняется только при строго фиксированном положении двойного нуля системы в точке -1. Только при строгом выполнении этого условия выходящие из двойных чисто мнимых полюсов нечетные траектории целиком лежат в левой полуплоскости, касаясь мнимой оси в точках $\pm i$. (См. рис. 5, на котором построены траектории корней системы (12) при увеличении ε в пределах $0<\varepsilon<\infty$.) При сколь угодно малом нарушении указанного положения двойного нуля траектории будут заходить в правую полуплоскость на величину, сравнимую с величиной нарушения. Это доказывает, что в рассматриваемом 4 случае системы не грубы, не только по начальным условиям, но и по необходимым условиям существования предельной устойчивости, т. е. физически предельная устойчивость систем типа 4 неосуществима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
2. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. ДАН АН СССР, **14**, № 5, 1937.
3. Теодорчик К. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 4, 1957.
4. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
5. Теодорчик К. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1965.

Поступила в редакцию
1. 3 1966 г.

Кафедра
физики колебаний