Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1967

УДК 537.1 : 530.12

М. Н. МАХАНТА

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исследуется геометрическая структура электромагнитного поля на основе тензора энергии импульса поля.

Хотя первоначальные представления об электромагнитном поле основаны на силовых линиях, вскоре после создания специальной теории относительности стало ясно, что понятие силовых линий не может быть абсолютным. Причина заключается в том, что силовая линия определяется на основе двух понятий, каждое из которых является зависящим от системы отсчета. Эти понятия: одновременность событий в разных точках и разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное поля.

Как показано в работах [1, 6], силовая линия может быть релятивистски инвариантным геометрическим образом, если только она движущаяся. Это значит, что в четырехмерном пространстве она представляет собой многообразие двух измерений. Сечение этого многообразия плоскостью (в четырехмерном пространстве) $t=\mathrm{const}$ дает многообразие одного измерения — линию в обычном трехмерном пространстве. Это многообразие двух измерений представляет собой в любой системе отсчета поверхности двух измерений, образуемые движущимися силовыми линиями.

Настоящая статья посвящена исследованию условий, при которых силовые линии электромагнитного поля образуют поверхности двух измерений. Так как главную роль в наших рассуждениях играет тензор энергии—импульса поля, мы сначала установим некоторые геометрические свойства этого тензора.

§ 1. Главные оси тензора энергии—импульса электромагнитного поля в четырехмерном пространстве

В четырехмерном пространстве Минковского тензор энергии—импульса электромагнитного поля T_{iR} выражается через тензор напряженности электромагнитного поля F_{iR} следующим образом:

$$T_{iR} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{Rl} - \frac{1}{4}F_{lm}^2\,\delta_{iR}\right).$$

Для определения главных осей этого тензора нужно сначала определить его главные значения, т. е. значения λ, удовлетворяющие уравнению

$$|T_{iR} - \lambda\delta_{iR}| = 0. \tag{1}$$

Поскольку λ является инвариантом, проведем расчеты в системе отсчета, где в данной точке пространства — времени электрическое поле параллельно магнитному (предполагая, что они не перпендикулярны друг другу). Таких систем бесконечно много и скорость $\vec{v}$ одной из них относительно исходной определяется соотношением [2]:

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{1}{2}\,\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{r|\vec{E}\times\vec{H}|^2}\,(E^2 + H^2 - \sqrt{k^2 + 4J^2}).$$

Здесь $K = H^2 - E^2$, $J = \vec{H}\cdot\vec{E}$, т. е. инвариантны поля.

Запишем значения λ, удовлетворяющие (1)

$$+\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2 + 4J^2},\ +\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2 + 4J^2},$$

$$-\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2 + 4J^2},\ \ -\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2 + 4J^2}.$$

Итак, имеются два главных значения, каждое из которых является двухкратным. Это означает, что соответственно каждому из этих двух главных значений существует бесконечное (∞') множество выборов главной оси, так как, если мы нашли две главные оси, соответствующие любому из этих двух значений, то каждая линейная комбинация этих векторов тоже явится главной осью, обладающей тем же главным значением. Нам достаточно определить два взаимно-ортогональных вектора из каждого множества (главные оси, соответствующие разным главным значениям всегда взаимно ортогональные). Целесообразно их определить сначала в системе отсчета, где в данной точке $\vec{E}'\|\vec{H}'$, и потом преобразовать к исходной системе с помощью преобразования Лоренца [3].

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}\left[\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{v^2}\{(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1\} + \frac{i}{c}\,x^4(1 - v^2/c^2)^{-1/2}\right]$$

$$x'^4 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}\left\{x^4 - i\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{x}}{c}\right\}.$$

В результате получим следующие векторы в качестве главных осей:

$$\left\{\begin{aligned} &L_a^i \infty [2(\vec{E}\times\vec{H}),\ i(E^2 + H^2 - \sqrt{K^2 + 4J^2})] \\ &L_b^i \infty [(K + \sqrt{K^2 + 4J^2})\vec{E} - 2J\vec{H},\ 0], \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &L_c^i \infty [2J\vec{E} + (K + \sqrt{K^2 + 4J^2})\vec{H},\ 0] \\ &L_d^i \infty [2(\vec{E}\times\vec{H}),\ i(E^2 + H^2 + \sqrt{K^2 + 4J^2})] \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(знак ∞ обозначает пропорциональность, т. е. умножение на любую функцию). При этом L_a^i, L_b^i обладают одним и тем же главным значением $+\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2+4J^2}$, а L_c^i и L_d^i обладают одним и тем же значением $-\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2+4J^2}$.

Эти выражения удовлетворяют следующим уравнениям при соответствующих значениях λ:

$$(T_{iR}-\lambda\delta_{iR})L^i=0. \tag{3}$$

§ 2. Ковариантность выражений для главных осей

Возникает вопрос, в каком смысле L_a^i, L_b^i, L_c^i и L_d^i, определяемые (2), представляют собой 4-векторы?

Наша система отсчета произвольна. Если бы расчеты были сделаны в системе, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой, то в этой системе мы получили бы следующие выражения для главных осей:

$$\left\{\begin{aligned} & L_a'^i\propto[2(\vec{E}'\times\vec{H}'),\ i(E'^2+H'^2-\sqrt{K^2+4J^2})],\\ & L_b'^i\propto[(K+\sqrt{K^2+4J^2})'\vec{E}'-2J\vec{H}',\ 0],\\ & L_c'^i\propto 2\vec{J}'+(k+\sqrt{K^2+4J^2})H,\ 0,\\ & L_c'^i\propto[2(\vec{E}'\times\vec{H}'),\ i(E'^2+H'^2+\sqrt{K^2+4J^2})]\end{aligned}\right. \tag{4}$$

или взаимно ортогональные линейные комбинации этих векторов по парам. В этом можно убедиться, если преобразовать уравнение (3):

$$(T'_{lm}-\lambda\delta_{lm})\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}L^i=0. \tag{5}$$

Таким образом, преобразованный вектор

$$L'^p=\frac{\partial x'^p}{\partial x^i}L^i$$

должен удовлетворять (5), т. е. должен быть линейной комбинацией

$$\text{векторов } L'^i_a \text{ и } L'^i_b \text{ при } \lambda=\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2+4J^2},$$

и

$$\text{векторов } L'^i_1 \text{ и } L'^i_d \text{ при } \lambda=-\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2+4J^2}.$$

Можно доказать, что каждый из векторов в (1) можно получить непосредственным вычислением, преобразованием Лоренца линейных комбинаций типа $PL_a^i+QL_b^i$ или $RL_c^i+SL_d^i$ в исходной системе. (Для доказательства можно обратиться к диссертации автора «Некоторые геометрические свойства электромагнитного поля», МГУ, 1966.)

§ 3. Образуют ли силовые линии электромагнитного поля поверхности двух измерений в четырехмерном пространстве?

Мы уже знаем, что тензор энергии-импульса является дважды вырожденным, так как имеются два главных значения, каждое из которых двухкратное. Поэтому для каждого значения существует бесконечное

(∞') множество выборов главной оси. В каждой точке совокупность главных осей, соответствующих каждому главному значению, составляет элементарную поверхность двух измерений. Возникает вопрос, образуют ли эти элементы в разных точках системы целых поверхностей двух измерений. Для этого требуется выполнение некоторых условий интегрируемости.

Возьмем сначала главные оси, соответствующие главному значению $-\frac{1}{8\pi}\sqrt{K^2+4J^2}$, т. е. L_c^i и L_d^i из (2).

Составим комбинацию $\lambda L_c^i + \mu L_d^i$ и отождествим ее элементарному вектору dx^i в точке x^i, т. е. напишем

$$dx^i = \lambda L_c^i + \mu L_d^i \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{6}$$

В результате исключения λ и μ из (6) получаются следующие два независимых уравнения в полных дифференциалах (уравнения Пфаффа):

$$2(\vec{E}\times\vec{H})\,d\vec{r} + i\,(E^2+H^2-\sqrt{K^2+4J^{2\prime}})\,dx^4 = 0,$$

$$\{(K+\sqrt{K^2+4J^2})\,\vec{E} - 2J\vec{H}\}\,d\vec{r} = 0. \tag{7}$$

Здесь $d\vec{r} = (dx', dx^2, dx^3)$, $dx^4 = icdt$.

Для того чтобы существовали системы целых поверхностей двух измерений, система уравнений (7) должна быть вполне интегрируемой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты дифференциалов $x_{\mu i}$ ($\mu=1, 2$; $i=1, 2, 3, 4$) удовлетворяли следующим соотношениям [4]:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} u_i v_j \left(\frac{\partial x_{\mu_i}}{\partial x^i} - \frac{\partial x_{\mu_i}}{\partial x^j}\right) = 0. \tag{8}$$

$$\mu = 1,\ 2.$$

Здесь u_i, v_i являются независимыми решениями уравнений (7) по dx^i. В качестве u_i и v_i можно брать

$$u_i = [2(\vec{E}\times\vec{H}),\ i\,(E^2+H^2+\sqrt{K^2+4J^2})],$$

$$v_i = [2J\vec{E} + (K+\sqrt{K^2+4J^2})\vec{H},\ 0].$$

При подстановке этих значений в левую сторону (8) данное условие не выполняется даже в случае вакуума в поле (отсутствия зарядов и токов).

Итак, в общем случае элементарные поверхности, образуемые векторами L_c^i и L_d^i, не образуют системы целых поверхностей двух измерений. Подобным образом можно доказать то же самое в случае векторов L_a^i и L_b^i.

Хотя условия интегрируемости (8) не выполняются в общем случае, в двух частных случаях они выполнимы (вообще говоря в вакууме). Приведем эти случаи

1. $J=0$, т. е. $\vec{E}\perp\vec{H}$ всюду

2. $K=0$, т. е. $E^2=H^2$ всюду.

В случае 1 главные оси:

$$\begin{cases} L_a^i \infty [\vec{E} \times \vec{H},\ iE^2] \\ L_b^i \infty [\vec{E},\ 0] \end{cases} \quad \begin{cases} L_c^i \infty [\vec{H},\ 0] \\ L_d^i \infty [\vec{E} \times \vec{H}^2,\ iH^2]. \end{cases}$$

В случае векторов L_c^i и L_d^i (магнитные силовые линии) [1] существуют поверхности двух измерений без какого-либо предположения о вакууме, но электрические силовые линии (случай векторов L_a^i и L_b^i) образуют поверхности двух измерений только в вакууме.

В случае 2 главные оси:

$$\begin{cases} L_a^i \infty [2(\vec{E} \times \vec{H}),\ i\{(H_x - E_x)^2 + (H_y - E_y)^2 + (H_з - E_з)^2\}] \\ L_b^i \infty [\vec{H} - \vec{E},\ 0] \end{cases}$$

$$L_c^i \infty [\vec{H} + \vec{E},\ 0],$$

$$L_d^i \infty [2(\vec{E} \times \vec{H}),\ i\{(H_x + E_x)^2 + (H_y + E_y) + (H_з + E_з)^2\}].$$

В этом случае тоже условия интегрируемости выполнены, причем в вакууме.

§ 4. Соответствие с многообразием «движущихся силовых линий»

Установим полное соответствие между сказанным выше и многообразием «движущихся силовых линий», которое разбирается в работе [1].

Многообразие силовых линий (в общем случае) [1] определяется уравнениями

$$\begin{aligned} d\vec{r} \times \vec{p} + c\vec{Q}\, dt &= 0, \\ \vec{Q}\, d\vec{r} &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

а многообразие магнитоэлектрических линий определяется

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{H} - \frac{1}{2J}(K - \sqrt{K^2 + 4J^2})\vec{E}, \\ Q &= \frac{1}{2J}(K - \sqrt{K^2 + 4J^2})\vec{H} + \vec{E}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставив (9) в (10) и умножив первое уравнение (9) скалярно на

$$\{(K + \sqrt{K^2 + 4J^2})\vec{E} - 2J\vec{H}\}$$

и использовав состношение

$$E^2(K + \sqrt{K^2 + 4J^2}) - 2J^2 = \frac{1}{2}(K + \sqrt{K^2 + 4J^2})(E^2 + H^2 - \sqrt{K^2 + 4J^2}),$$

можно получить уравнение

$$2(\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{r} - c(E^2 + H^2 - \sqrt{K^2 + 4J^2})\, dt = 0,$$

которое вместе с уравнением

$$\{(K + \sqrt{K^2 + 4J^2})\vec{E} - 2J\vec{H}\} \cdot d\vec{r} = 0$$

есть не что иное, как (7), т. е. многообразие главных осей L_c^i и L_d^i в общем случае.

Подобным образом можно доказать, что многообразие электрически магнитных линий есть не что иное, как многообразие главных осей

$$L_a^i \text{ и } L_b^i.$$

В заключение автор выражает благодарность акад. М. А. Леонтовичу за постановку задачи и помощь при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтович М. А. «Успехи физич. наук», 84, вып. 4, 715—721, 1964.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
3. Möller C. M. The Theory of Relativity. Oxford, 1962.
4. Forsyth A. R. Theory of Differential Equations, part 1, vol. 1. Cambridge, 1890.
5. Терлецкий Я. П. ЖЭТФ, 32, 927, 1967.
6. William A. Ann. Phys., 3, 347—385, 1958.

Поступила в редакцию
15. 3 1966 г.

Кафедра
теоретической физики