

НГУЕН ТАНГ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФЛУКТУАЦИЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ ГИББСА

Методом Гиббса выводятся точные соотношения для вычисления флуктуаций и корреляций квантовых систем. Получена флуктуационно-диссипационная теорема без применения теории возмущений. Результаты применяются для вычисления среднего квадрата смещения квантового броуновского движения.

В работах [1, 2, 5] показано, что общими методами статистической механики или методом Гиббса выводятся точные соотношения, позволяющие вычислять флуктуации и моменты различных физических величин для классических систем. Основной принцип метода заключается во введении дополнительных постоянных сил, действующих на систему в направлении обобщенных координат и в установлении соотношений, позволяющих вычислять высшие моменты через низшие, являющиеся функциями этих постоянных сил, которые могут быть определены чисто эмпирически. В работе показано, что этот метод применим и для вычисления флуктуаций и моментов квантовых систем. Получены квантовые обобщения соотношений, выведенных ранее в [1, 5].

§ 1. Корреляции величин для квантовых равновесных систем

Пусть $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ — обобщенные координаты квантовой системы. Если на квантовую систему в направлении координат $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ действуют дополнительные постоянные силы $-a_1, -a_2, \dots, -a_n$, то гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \sum_n a_n \hat{Q}_n. \quad (1)$$

Для простоты вычисления рассмотрим одномерный случай: $\hat{H} = \hat{H}_0 + a\hat{Q}$. Полученные результаты легко расширяются для системы, гамильтониан которой имеет вид (1).

Термодинамическое равновесное состояние, соответствующее температуре θ , описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \exp\left(\frac{\psi - \hat{H}}{\theta}\right), \quad (2)$$

где ψ — свободная энергия.

Условие нормировки имеет вид

$$Sp \exp \left(\frac{\Psi - \hat{H}}{\theta} \right) = 1. \quad (3)$$

Согласно [3] дифференцирование операторной функции $\hat{E}_\lambda(\tau) = \exp[\tau(\hat{a} + \lambda\hat{b})]$ по параметру λ равно: так называемой левой производной

$$\frac{\partial \hat{E}_\lambda(\tau)}{\partial \lambda} = \left\{ \tau \hat{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{[\hat{a} + \lambda \hat{b} [\hat{a} + \lambda \hat{b} \dots [\hat{a} + \lambda \hat{b}, \hat{b}] \dots]]}_n (i\hbar)^n \right\} \hat{E}_\lambda(\tau), \quad (4)$$

или правой производной,

$$\frac{\partial \hat{E}_\lambda(\tau)}{\partial \lambda} = \hat{E}_\lambda(\tau) \left\{ \tau \hat{b} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{[\hat{a} + \lambda \hat{b} [\hat{a}^2 + \lambda \hat{b} \dots [\hat{a}^2 + \lambda \hat{b}, \hat{b}] \dots]]}_n (i\hbar)^n \right\}, \quad (5)$$

где

$$[\hat{a} + \lambda \hat{b}, \hat{b}] = \frac{1}{i\hbar} ((\hat{a} + \lambda \hat{b}) \hat{b} - \hat{b} (\hat{a} + \lambda \hat{b})).$$

Дифференцируя (3) по a и используя формулу (4), получаем

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial a} + \frac{1}{\theta} \left[-\bar{Q} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^n \bar{Q}^{(n)} \right] = 0, \quad (6)$$

где

$$\bar{Q}^{(n)} = Sp [[\dots [\hat{Q}, \hat{H}] \underbrace{\hat{H}}_n \dots]] \hat{\rho}.$$

Для равновесной системы $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0$ и, следовательно, для произвольного оператора $\hat{F}$ получаем

$$\bar{\hat{F}}^{(n)} = Sp [[\dots [\hat{F}, \hat{H}] \underbrace{\hat{H}}_n \dots]] \hat{\rho} = 0.$$

Поэтому из (4) найдем

$$\bar{\bar{Q}} = \frac{\partial \Psi}{\partial a}. \quad (7)$$

Рассмотрим произвольную величину $F(x, a)$, зависящую как от координат, так и от скоростей. Тогда среднее значение произвольной величины F равно:

$$\bar{F} = Sp \hat{F} e^{\frac{\Psi - \hat{H}}{\theta}}. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по a , используя (4), получаем

$$\overline{(\hat{F} - \bar{\hat{F}})(Q - \bar{Q})} = -\theta \left(\frac{\partial \bar{\hat{F}}}{\partial a} - \frac{\partial \bar{\hat{F}}}{\partial a} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^n \bar{\hat{F}} \bar{Q}^{(n)}. \quad (9)$$

Так как $\hat{F}$ произвольный оператор, то в (9) $\hat{F}$ можно заменить $\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} = \hat{\hat{F}}$.

Более того: $\overline{\widehat{F}^{(n)}} = 0$, поэтому из (9) получаем выражение

$$\overline{\widehat{F}\widehat{Q}} = \theta \frac{\partial \overline{\widehat{F}}}{\partial a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^n \overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n)}}.$$

Кроме того, для равновесного процесса имеем соотношение

$$\frac{d}{dt} (\overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n)}}) = \overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n)}} + \overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n+1)}} = 0,$$

таким образом

$$\overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n)}} = (-1)^n \theta \frac{\partial \overline{\widehat{F}^{(n)}}}{\partial a} - \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{(n'+1)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{n'} \overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n'+n)}}.$$

С помощью этого выражения из (9) найдем

$$(\overline{\widehat{F} - \bar{F}})(\overline{\widehat{Q} - \bar{Q}}) = -\theta \left(\frac{\partial \overline{\widehat{F}}}{\partial a} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial a} \right) + \theta \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{m!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^m \frac{\partial \overline{\widehat{F}^{(m)}}}{\partial a}, \quad (10)$$

где B_m — числа Бернулли. Вычисление коэффициента общего члена будет проведено в приложении.

Аналогичным путем, используя формулу (5), найдем

$$(\overline{\widehat{Q} - \bar{Q}})(\overline{\widehat{F} - \bar{F}}) = -\theta \left(\frac{\partial \overline{\widehat{F}}}{\partial a} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial a} \right) + \theta \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{B_m}{m!} \left(-\frac{i\hbar}{\theta} \right)^m \frac{\partial \overline{\widehat{F}^{(m)}}}{\partial a}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) найдем выражение корреляций

$$\frac{1}{2} (\overline{\widehat{F}\widehat{Q} + \widehat{Q}\widehat{F}}) - \bar{F} \cdot \bar{Q} = -\theta \frac{\partial \overline{\widehat{F}}}{\partial a} + \frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left[\text{ctg} \frac{\hbar r}{2\theta} \widehat{F} \right], \quad (12)$$

где оператор $r = \frac{d}{dt}$, а $\text{ctg} \frac{\hbar r}{2\theta}$ — операторная функция. Кроме того, мы еще получаем выражение

$$\frac{1}{2} (\overline{\widehat{F}\widehat{Q}^{(n)} + \widehat{Q}^{(n)}\widehat{F}}) = (-1)^n \frac{\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left[\text{ctg} \frac{\hbar r}{2\theta} \widehat{F} \right]. \quad (13)$$

Соотношения (10) — (13) являются квантовыми обобщениями соответствующих классических соотношений (5) (см., например, формулу (21,1) в [5]), при помощи которых вычисляются квадратичные корреляции. Формулы (12) и (13) однако показывают, что этими выражениями из макроскопических уравнений движения нельзя вычислять прямо флуктуации и корреляции квантовых равновесных систем, так как мы не знаем, как эмпирически измерить правые части этих выражений. Однако метод доказательства этих выражений помогает нам найти временные корреляции.

§ 2. Вычисление временной корреляции

Пусть неравновесный ансамбль образуется из равновесного путем включения в начальный момент времени дополнительной постоянной силы α , действующей в направлении обобщенной координаты $\widehat{Q}$.

Тогда в силу сохранения энергии матрица плотности неравновесного ансамбля в момент t равна

$$\hat{\rho}_t = \exp \left[\frac{\Psi - \hat{H}_0(t) + \alpha \hat{Q}_t - \alpha \hat{Q}_0}{\theta} \right].$$

Среднее значение произвольной величины F по неравновесному ансамблю будет

$$\bar{F}_t^\alpha = Sp \left\{ \hat{F}_t \exp \left[\frac{\Psi - \hat{H}_0(t) + \alpha \hat{Q}_t - \alpha \hat{Q}_0}{\theta} \right] \right\}. \quad (14)$$

Дифференцируя (14) по α , используя (4), (5) и полагая $\alpha=0$, получаем

$$\left[\frac{\partial \bar{F}_t^\alpha}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\theta} \overline{\hat{F}_t (\hat{Q}_t - \hat{Q}_0)} + \frac{1}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^n \overline{\hat{F}_t (\hat{Q}_t^{(n)} - \hat{Q}_0^{(n)})},$$

$$\left[\frac{\partial \bar{F}_t^\alpha}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha} + \frac{1}{\theta} \overline{(\hat{Q}_t - \hat{Q}_0) \hat{F}_t} + \frac{1}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left(-\frac{i\hbar}{\theta} \right)^n \overline{(\hat{Q}_t^{(n)} - \hat{Q}_0^{(n)}) \hat{F}_t}.$$

Аналогично, как и показано в § 1, из этих выражений в силу стационарности

$$\frac{d}{dt} \overline{\hat{F}_t (\hat{Q}_t^{(n)} - \hat{Q}_0^{(n)})} = \overline{\hat{F}_t (\hat{Q}_t^{(n)} - \hat{Q}_0^{(n)})} + \overline{\hat{F}_t (\hat{Q}_t^{(n+1)} - \hat{Q}_0^{(n+1)})} = 0$$

найдем

$$\frac{1}{2} \overline{(\hat{F}_t \hat{Q}_t + \hat{Q}_t \hat{F}_t) - (\hat{F}_t \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_t)} =$$

$$= \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \left[\frac{\partial \bar{F}_t^{(2m)\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{F}^{(2m)}}{\partial \alpha^2} \right]_{\alpha=0}. \quad (15)$$

Это выражение представляет собой квантовое обобщение выражения Я. П. Терлецкого [1]. Его можно переписать:

$$\frac{1}{2} \overline{(\hat{F}_t \hat{Q}_t + \hat{Q}_t \hat{F}_t) - (\hat{F}_t \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_t)} =$$

$$= \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \left[\frac{\partial \bar{F}(t)^{(2m)\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{F}(0)^{(2m)\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}. \quad (16)$$

При $\hat{F} = \hat{Q}$ из (16) получается соотношение для определения зависимости среднего квадрата отклонения координаты от времени:

$$\overline{(\hat{Q}_t - \hat{Q}_0)^2} = 2\theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \left[\frac{\partial \bar{Q}(t)^{(2m)\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{Q}(0)^{(2m)\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \quad (17)$$

В классическом случае из (17) получаем выражение, полученное В. В. Владимирским [9].

Ранее в [10] другим методом (методом Феймана с упорядочивающим индексом) Р. Л. Стратонович получил аналогичные корреляционные формулы для операторов типа обобщенных координат. Однако формулы (12), (16) и (18) более общие, чем полученные Р. Л. Стратоновичем, так как в них $\hat{F}$ является произвольным оператором. Эти формулы удобно позволяют вычислять корреляции с помощью макроскопических уравнений движения.

Из (12) и (16) найдем выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\overline{\hat{F}_t \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_t}) - \bar{F} \cdot \bar{Q} = \\ & = \theta \left[\frac{\partial \bar{F}^{\alpha}_{\text{рав}}}{\partial \alpha} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \frac{\partial \bar{F}(t)^{(2m)\alpha}_{\text{нер}}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношения (16) — (18) показывают, что мы можем вычислить временную корреляцию величины F и обобщенной координаты Q для квантовой системы, если знаем среднее значение величины F в неравновесном процессе, созданном путем включения дополнительной силы α , действующей в направлении координаты Q . Эта величина может быть определена макроскопическими уравнениями движения. Например, рассмотрим квантовую броуновскую частицу с коэффициентом линейного трения γ . Уравнение движения броуновской частицы под действием силы α имеет вид

$$m\ddot{q}_t + \gamma \dot{q}_t = \alpha.$$

С помощью (17) найдем средний квадрат смещения квантовой броуновской частицы равен

$$\overline{(q_t - q_0)^2} = \frac{2\theta t}{\gamma} + \frac{\hbar}{\gamma} \left(e^{-\frac{\gamma t}{m}} - 1 \right) \text{ctg} \frac{\hbar \gamma}{2\theta m}. \quad (19)$$

В случае $\theta \gg \frac{\hbar \gamma}{2m}$ получаем выражение Ланжевена — Эйнштейна.

С помощью (19) можем вычислять квантовую флуктуацию. Действительно, из (19) найдем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\overline{\hat{F} \hat{Q} + \hat{Q} \hat{F}}) - \bar{F} \cdot \bar{Q} = \\ & = \theta \left[\frac{\partial \bar{F}^{\alpha}_{\text{рав}}}{\partial \alpha} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \frac{\partial \bar{F}(0)^{(2m)\alpha}_{\text{нер}}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (20)$$

Например, для квантового гармонического осциллятора из уравнения движения и условия равновесия $m\omega^2 \bar{q}^{\alpha}_{\text{рав}} = \alpha$ получаем выражение флуктуации

$$\overline{(\hat{q} - \bar{q})^2} = \frac{\hbar}{2m\omega} \text{cth} \frac{\hbar \omega}{2\theta}.$$

Это выражение совпадает с известным результатом, получаемым прямым путем из квантовой статистики [4].

Аналогично, как показано выше, найдем выражение

$$\frac{1}{2} (\overline{\hat{F}_t \hat{Q}_0^{(n)} + \hat{Q}_0^{(n)} \hat{F}_t}) = (-1)^n \cdot \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \left[\frac{\partial \bar{F}_t^{(n+2m)\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}. \quad (21)$$

Выражение (21) представляет собой квантовое обобщение выражения, полученного в [2].

В случае $n=1$ имеем формулу

$$\frac{1}{2} (\overline{\hat{F}_t \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_t}) = \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{i\hbar}{\theta} \right)^{2m} \left[\frac{\partial \bar{F}_t^{(2m+1)\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0}. \quad (22)$$

Выражение (22) позволяет вычислять временную корреляцию обобщенных скоростей (например корреляцию токов). Все предыдущие выражения применяются только для $t > 0$, так как выбранный неравновесный процесс начинается при $t = 0$ и протекает при $t > 0$.

§ 3. Спектральное представление временных корреляций

Найдем Фурье-компоненты временных корреляций $\varphi(t)^*$. В силу симметрии корреляции по времени и согласно [6] имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} [\overline{(\hat{F}_t \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_t)} + \overline{(\hat{F}_{-t} \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_{-t})}] = \int_{-\infty}^{\infty} (FQ)_\omega e^{-i\omega t} d\omega,$$

где $(FQ)_\omega$ — спектральная плотность корреляции $\varphi(t)$; $4_{\text{член}} \frac{1}{2} \overline{(\hat{F}_t \hat{Q}_0 + \hat{Q}_0 \hat{F}_t)}$ определена выражением (19).

Таким образом, из (19) получаем флуктуационно-диссипационную теорему [7]:

$$(FQ)_\omega = - \left[\frac{\partial \bar{F}_\omega^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{F}_\omega^{*\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \frac{\hbar \omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\theta}, \quad (23)$$

где

$$\bar{F}_\omega^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \bar{F}_t^\alpha e^{i\omega t} dt.$$

Член, находящийся в скобке, относится к диссипационным свойствам системы. Например, для линейных случайных процессов исходя из макроскопического уравнения движения [2]

$$L_{ik} \overline{\hat{Q}_k(t)}^\alpha = \alpha_i \eta(t),$$

где $\eta(t)$ — функция Хевисайда, получаем

$$(Q_k Q_i)_\omega = \frac{i\hbar}{4\pi} [L_{ki}^{-1*}(\omega) - L_{ik}^{-1}(\omega)] \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\theta}. \quad (24)$$

Для броуновского движения с помощью (24) и обратным преобразованием Фурье получим (20)

Кроме того, из (21) найдем выражение

$$(FQ^{(n)})_\omega = (-1)^{n-1} (-i\omega)^n \frac{\hbar \omega}{2} \left[\frac{\partial \bar{F}_\omega^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{F}_\omega^{*\alpha}}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\theta}. \quad (25)$$

Когда $\hat{F} = \hat{Q}_i^{(n)}$, получим

$$(Q_i^{(m)} Q_k^{(n)})_\omega = (-1)^{n-1} (-i\omega)^n \frac{\hbar \omega}{2} \left[\frac{\partial \overline{Q_i^{(m)}(w)}^\alpha}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \overline{Q_i^{(m)*}(w)}^\alpha}{\partial \alpha_k} \right]_{\alpha=0} \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2\theta}. \quad (26)$$

В отличие от [7, 6] и других работ соотношения (23), (25), (26) получены не в приближении теории возмущений, а как точные теоремы.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за постановку проблемы и общее руководство и В. В. Магалинскому за интерес к работе.

* $\varphi(t)$ определена для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Приложение

Докажем, что коэффициенты общих членов в разложениях (10), (11), (14) равны $(-1)^m \frac{B_m}{m!}$. Действительно, этот коэффициент равен

$$A = (-1)^m \left\{ -\frac{1}{(m+1)!} + \sum_{n_1, n_2=1}^{m-1} \frac{1}{(n_1+1)!(n_2+1)!} - \right. \\ \left. - \sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{m-2} \frac{1}{(n_1+1)!(n_2+1)!(n_3+1)!} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^m \sum_{n_1, \dots, n_{m-1}=1}^1 \frac{1}{(n_1+1)!(n_2+1)!(n_3+1)! \dots (n_{m-1}+1)!} \right\},$$

где в первой сумме индексы n_1, n_2 могут иметь значения от 1 до $m-1$, $n_1 + n_2 = m$, а во второй сумме $\begin{cases} n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \dots, m-2 \\ \text{условие: } n_1 + n_2 + n_3 = m \text{ и т. д.} \end{cases}$

Напишем первую сумму:

$$\sum_{n_1, n_2=1}^{m-1} \frac{1}{(n_1+1)!(n_2+1)!} = \sum_{n_1=1}^{m-1} \frac{1}{(n_1+1)!(m-n_1+1)!}$$

Для второй суммы положим $n_1 + n_2 = l_1$. Таким образом

$$n_2 = m - l_1, \quad \text{где} \quad 2 \leq l_1 \leq m-1,$$

$$n_2 = l_1 - n_1, \quad \text{где} \quad 1 \leq n_1 \leq l_1 - 1,$$

$$\sum_{n_1, n_2, n_3=1}^{m-2} \frac{1}{(n_1+1)!(n_2+1)!(n_3+1)!} = \sum_{l_1=2}^{m-1} \frac{1}{(m-l_1+1)!} \sum_{n_1=1}^{l_1-1} \frac{1}{(n_1+1)!(l_1-n_1+1)!}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = m$$

Проводя простое преобразование, получаем

$$m!A = (-1)^m \left[\frac{1}{m+1} \left\{ -1 + \sum_{l_1=1}^{m-1} \frac{\binom{m+1}{l_1}}{l_1+1} - \sum_{l_1=2}^{m-1} \frac{\binom{m+1}{l_1}}{l_1+1} \sum_{l_2=1}^{l_1-1} \frac{\binom{l_1+1}{l_2}}{l_2+1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + (-1)^m \sum_{l_1=m-1}^{m-1} \frac{\binom{m+1}{l_1}}{l_1+1} \sum_{l_2=m-2}^{l_1-1} \frac{\binom{l_1+1}{l_2}}{l_2+1} \dots \sum_{l_{m-1}=1}^{l_{m-2}-1} \frac{\binom{l_{m-2}+1}{l_{m-1}}}{l_{m-1}-1} \right\} \right].$$

Выражение, находящееся в скобках, можно записать в виде

$$I_m = -\frac{1}{m+1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \binom{m+1}{1} + \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{l_2=1}^1 \frac{\binom{l_1+1}{l_2}}{l_2+1} \right] \binom{m+1}{2} + \dots + \right. \\ \left. + \left[-\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \sum_{l_2=1}^{m-2} \frac{\binom{m}{l_2}}{l_2+1} - \frac{1}{m} \sum_{l_2=2}^{m-2} \frac{\binom{m}{l_2}}{l_2+1} \sum_{l_3=1}^{l_2-1} \frac{\binom{l_2+1}{l_3}}{l_3+1} + \dots \right] \right\}$$

$$\dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m} \sum_{l_2=m-2}^{m-2} \frac{\binom{m}{l_2}}{l_2+1} \dots \sum_{l_{m-1}=1}^{l_{m-2}-1} \frac{\binom{l_{m-2}+1}{l_{m-1}}}{l_{m-1}+1} \binom{m+1}{m-1} \}.$$

Аналогично, можем написать выражение для I_{m-1} . Сравнивая рекуррентное I_m с рекуррентным соотношением числа Бернулли [8], заметим, что $I_m \equiv B_m$, таким образом

$$A = (-1)^m \frac{B_m}{m!}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Terletsky I. P. Nouvo Cim., 7, 308, 1958; Терлецкий Я. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., астроном., физ., химии», № 4, 119, 1957.
2. Милантьев В. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 4, 71, 1960.
3. Киржниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц. М., Госатомиздат, 1963.
4. Леонтович М. А. Статистическая физика. М., ОГИЗ, 1944.
5. Терлецкий Я. П. Статистическая физика. М., «Выш. школа», 1966.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
7. Callen H., Welton T. Phys. Rev., 83, 34, 1951.
8. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1959.
9. Владимирский В. В. ЖЭТФ, 12, 199, 1942.
10. Стратонович Р. Л. ЖЭТФ, 39, 1641, 1960.

Поступила в редакцию
30. 3 1966 г.

Кафедра
теоретической физики