в течение которого слабый сигнал запоминается параметроном, меньше τ и аналогично (2) $|r| \leqslant [kT/n \cdot \Delta t]$. Отсюда, в частности, можно определить величину $\Delta t \approx Tk/rn$, представляющую интерес для цифровой техники: так, например, для двоичного параметрона экспериментальные значения $\Delta t \sim (0{,}2—0{,}5)\,\tau$, для троичного параметрона — $\Delta t \sim 0{,}1 \cdot \tau$.

В заключение отметим, что зависимость F от $f_м$ можно использовать для осуществления синхронизации запуска П-1 частотой опорного параметрона, применяя в качестве сигнала частоту накачки.

ЛИТЕРАТУРА

Ахманов С. А., Комолов В. П., Чиркин А. С. «Изв. вузов», радиофизика, 7, № 4, 693, 1964.

Поступила в редакцию
2. 10 1966 г.

Кафедра
радиотехники

Ю. М. НИКОЛАЕВ

УДК 534.22

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНО ВВЕРХ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ

В настоящее время спектр малых колебаний в атмосфере известен достаточно подробно [1—5]. Наиболее полное исследование вопроса при учете реальной стратификации сферической атмосферы проведено в [6].

Влияние диссипативных механизмов вязкости и теплопроводности изучалось сравнительно мало. Оценки вязкого затухания гравитационных волн можно найти в [7—8]. В работе [2] рассмотрен вопрос о затухании всех видов волн (волны Лэмба, акустические и гравитационные) в изотермической атмосфере и проведены оценки относительной роли различных механизмов затухания.

При учете вязкости в однородном поле тяжести (g_z) движение во всем пространстве в направлении вертикальной оси $0z$ для изотермической атмосферы описывается системой гидродинамических уравнений для вязкой сжимаемой жидкости Навье—Стокса (непрерывности и адиабатичности). В дальнейшем предполагается, что коэффициент динамической вязкости $\mu = \frac{\nu}{\beta}$ — величина постоянная, так как он зависит в основном только от температуры.

В статическом случае при $\bar{v} = 0$ движения нет:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\bar{\rho} = 0, \quad \bar{\rho} = \rho_0 l^{-\alpha z}, \tag{1}$$

$$\alpha = \frac{1}{z_0} = \frac{\varkappa g}{c^2}$$

Здесь $\bar{v}$ — скорость невозмущенного движения, p — давление, c — изотермическая скорость звука, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

Рассмотрим одномерные малые колебания вдоль $0z$.

Линеаризацию системы уравнений производим стандартным образом:

$$\begin{gathered}\bar{\rho}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} + g\rho - \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{\rho} v) = 0;\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - c^2\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\varkappa - 1)g\bar{\rho} v = 0.\end{gathered} \tag{2}$$

При выводе системы (2) использовалось соотношение $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + g\bar{\rho} v$, которое получается из [4].

Будем искать квазистационарное решение, т. е. $\frac{\partial}{\partial t} = -\omega$. В этом случае система (2) значительно упрощается и после соответствующих преобразований получаем

$$(e^{-\xi} + \varepsilon^2)\frac{d^2v}{d\xi^2} - e^{-\xi}\frac{dv}{d\xi} - \lambda^2 e^{-\xi} v = 0. \quad (3)$$

Были введены новые обозначения

$$\xi = \alpha z, \ \varepsilon^2 = \frac{\omega \nu_0}{c^2}, \ \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0}, \ \lambda^2 = \frac{\omega^2 z_0^2}{c^2}.$$

Уравнение (3) заменой переменных сводится к гипергеометрическому уравнению. В качестве граничных условий используем требование конечности решения при $\xi \to \infty$ и обращения скорости v в ноль при $\xi = 0$.

Введем новые переменные

$$x = 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\xi}, \ v(x) = v(\xi).$$

После необходимых преобразований получаем гипергеометрическое уравнение

$$x(1-x)v'' + (1-2x)v' + \lambda^2 v = 0 \quad (4)$$

с параметрами, удовлетворяющими соотношениям

$$\gamma = 1, \ \alpha + \beta = 1, \ \lambda^2 = \alpha(\alpha - 1).$$

Для определения собственных частот необходимо выделить конечное решение $w(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при $x = 1$ ($\xi \to \infty$).

Единственность такого решения вытекает из расходимости гипергеометрического ряда при $x=1$, так как $\gamma - \alpha - \beta = 0$ [10]. Решение должно также удовлетворять условию

$$w\left(\lambda^2, \frac{(\varepsilon^2+1)}{\varepsilon^2}\right) = 0, \quad (5)$$

что возможно лишь при определенных значениях λ. Отсюда определяется дискретный спектр собственных частот. Аналитические выражения для собственных частот можно получить из уравнения (5) лишь в крайних предельных случаях малой и большой вязкости.

Рассмотрим сначала предельный случай $\varepsilon^2 \gg 1$, соответствующий случаю тех собственных частот, когда вязкость очень значительна $\frac{\omega \nu_0}{c^2} \gg 1$. При этом величина $1 - x$ при $1 \leqslant x \leqslant \frac{(\varepsilon^2+1)}{\varepsilon^2}$ всюду меньше единицы. Заменой переменных, как описано в [10], при выполнении соотношения $\alpha + \beta + \gamma = 2$, получаем

$$\omega(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\alpha, 1-\alpha, 1, -x),$$

где F — гипергеометрическая функция, а значения α находятся из уравнения

$$F\left(\alpha, 1-\alpha, 1, -\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = 0.$$

Мы рассматриваем предельный случай, когда $\frac{1}{\varepsilon^2} \ll 1$; поэтому уравнение (5) имеет решение лишь при $|\alpha| \gg 1$ так, что величина $\frac{\alpha}{\varepsilon} \sim 1$. Полагая $\frac{1}{\varepsilon} = S$ и разлагая гипергеометрический ряд по обратным степеням α, получим, что с точностью до квадратичных по S членов (9) имеет вид: $I_0(2\alpha S') - SI_1(2\alpha S) = 0$, где I_0 и I_1 — функции Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого и первого порядков. Решая (5) методом последовательных приближений, получим

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left(1 + i\frac{\mu_n}{S}\right),$$

где μ_n — n-ный корень уравнения $J_0(x)=0$, причем J_0 — функция Бесселя вещественного аргумента. Соответствующие собственные частоты ω_n определяются из уравнения $\lambda_n^2 = \alpha_n(\alpha_n-1)$.

Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$w_n = \pm i\frac{c}{2z_0}\left(1+\frac{\mu_n^2}{4}\cdot\frac{\nu_0^2}{c^2z_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (6)$$

Из выражения видно, что частоты чисто мнимы, т. е. вязкие акустические колебания гармоничны. Причем n-ная — гармоника имеет n нулей (включая граничный) и при $\xi\to\infty$ принимает постоянное значение.

В противоположном предельном случае слабой вязкости ($\varepsilon^2\ll 1$) уравнение (3) при не слишком больших ξ переходит в акустическое. Однако при $\xi\gtrsim\ln\varepsilon$ начинает сказываться влияние вязкости. Решение имеет вид

$$v_1=\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,\alpha,2\alpha,\frac{1}{x}\right). \qquad (7)$$

Уравнению (4) удовлетворяет комплексно сопряженная функция

$$v_2=\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha^*}F\left(\alpha^*,\alpha^*,2\alpha^*,\frac{1}{x}\right). \qquad (7')$$

Оба решения логарифмически расходятся при $x=1$. Однако (см. (7) и (8)) можно построить конечное решение:

$$w(\alpha,\alpha,2\alpha,x)=\theta^*\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}F\left(\alpha,\alpha,2\alpha,\frac{1}{x}\right)-\theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha^*}F\left(\alpha^*,\alpha^*,2\alpha^*,\frac{1}{x}\right)$$

Определение константы θ в общем случае сложно. Однако, если принять, что параметр α в случае низких частот имеет вид

$$\alpha=\frac{1+i\delta}{2}, \qquad (\delta\ll 1),$$

можно разложить θ в ряд по степеням $\theta=\theta_0+i\delta$.

Подставляя разложения α и θ в решение w, которое является линейной комбинацией (7) и (7′) и полагая

$$\frac{1}{x}=\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\ll 1, \qquad \alpha=\frac{1+i\delta}{2},$$

получим с точностью до малых второго порядка:

$$(\theta_0-i\delta)\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\right)^{i\frac{\delta}{2}}-(\theta_0+i\delta)\left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\right)^{-i\frac{\delta}{2}}=0. \qquad (8)$$

Отсюда при $\delta\ll 1$ соответствующая правка к θ_0 не существенна и (8) сводится к уравнению

$$\sin\left(\delta\ln\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+1}}\right)\approx\sin(\delta\ln\varepsilon)=0.$$

При условии, что $n\ll\left|\ln\frac{\varepsilon}{\pi}\right|$, получаем $\delta_n=\frac{n\pi}{|\ln\varepsilon|}$. Для нахождения собственных частот используем опять-таки соотношение $\lambda^2=\alpha(\alpha-1)$, причем ищем ω_n в виде ряда по степеням ε. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\omega_n=i\frac{c}{2z_0}\left\{\left[1+\frac{n^2\pi^2}{4}\cdot\frac{\ln^2\left(\frac{\nu_0}{2z_0c}\right)-\frac{\pi^2}{4}}{\left(\ln^2\left(\frac{\nu_0}{2z_0c}\right)+\frac{\pi^2}{4}\right)^2}\right]^{-}\right.$$

$$
-i\,\frac{n^2\pi^3\ln\left(\dfrac{\nu_0}{2z_0c}\right)}{4\left(\ln^2\dfrac{\nu_0}{2z_0c}+\dfrac{\pi^2}{4}\right)^2}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.
$$

Включение малой вязкости определяет дискретный спектр собственных колебаний.

Выражаю глубокую благодарность Л. А. Дикому, Г. С. Голицину, Н. М. Романовой и Б. А. Тверскому за ценную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjerknes V., Bjerknes I. Physikalische Hudrodynamic. Berlin, Springer, 1933.
2. Eliassen A., Palm E. Acad. Sci. Lett., No. 1, 1954.
3. Hines C. O. J. Atmos. and Terr. Phys., 7, No. 1/2, 1955.
4. Монин А. С., Обухов А. М. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., № 11, 1958.
5. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. М., ИЛ, 1963.
6. Дикий А. А. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 1, № 5, 196, 1965.
7. Hines C. O. Canad. J. Phys., 38, No. 12, 1960.
8. Pitteway M. L. V., Hines C. O., Canad. J. Phys., 41, No. 12, 1962.
9. Голицын Г. С. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 1, № 2, 1965.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 2 и 3. М., Гостехиздат, 1953.
11. Тверской Б. А. «Геом. и аэрономия», 2, № 1, 1962.

Поступила в редакцию
24. 10 1966 г.

НИИЯФ

УДК 531.16

Л. Д. АКУЛЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕВОЗМУЩЕННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПО ОБРАТНЫМ СТЕПЕНЯМ ЭНЕРГИИ

§ 1. Постановка задачи. При исследовании вращательных движений в возмущенных системах с одной степенью свободы, близких к консервативным, описываемых уравнениями вида

$$
\ddot{x}+Q(x)=\varepsilon q,
$$

а также несколько более общими, где x — одномерная координата, $\dot{x}\equiv\dfrac{dx}{dt}$, $t\in(-\infty,\infty)$ — независимая вещественная переменная, $\varepsilon>0$ — малый параметр, q — возмущающая функция; рассматривалось также невозмущенное уравнение (см. [1—4])

$$
\ddot{x}+Q(x)=0, \tag{1}
$$

относительно которого предполагалось, что при выполнении следующих условий относительно функции $Q(x)$ (см. [1, 3, 4]: $Q(x+2\pi)=Q(x)$, причем

$$
\overline{Q}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q(x)\,dx=0 \tag{2}
$$

(независимо от параметров, которые еще могут входить в Q) и $E_0>|U|_{\max}$, где $E_0=\dfrac{\dot{x}^2}{2}+U(x)$ — сохраняющаяся «энергия», а $U(x)=\int Q(x)\,dx$ — периодический в силу (2) «потенциал» невозмущенной системы, а также некоторых условий гладкости, невозмущенное уравнение (1) имеет общее вращательное решение вида

$$
x=\frac{2\pi}{T_0(E_0)}(t-t_0)+\tau+\varphi\left(\frac{2\pi}{T_0(E_0)}(t-t_0)+\tau,\,E_0\right), \tag{3}
$$