$$-i\frac{n^2\pi^3\ln\left(\frac{\nu_0}{2z_0c}\right)}{4\left(\ln^2\frac{\nu_0}{2z_0c}+\frac{\pi^2}{4}\right)^2}\Bigg\}^{\frac{1}{2}}.$$

Включение малой вязкости определяет дискретный спектр собственных колебаний.

Выражаю глубокую благодарность Л. А. Дикому, Г. С. Голицину, Н. М. Романовой и Б. А. Тверскому за ценную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bjerknes V., Bjerknes I. Physikalische Hudrodynamic. Berlin, Springer, 1933.
2. Eliassen A., Palm E. Acad. Sci. Lett., No. 1, 1954.
3. Hines C. O. J. Atmos. and Terr. Phys., 7, No. 1/2, 1955.
4. Монин А. С., Обухов А. М. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., № 11, 1958.
5. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. М., ИЛ, 1963.
6. Дикий А. А. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 1, № 5, 196, 1965.
7. Hines C. O. Canad. J. Phys., 38, No. 12, 1960.
8. Pitteway M. L. V., Hines C. O., Canad. J. Phys., 41, No. 12, 1962.
9. Голицын Г. С. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 1, № 2, 1965.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 2 и 3. М., Гостехиздат, 1953.
11. Тверской Б. А. «Геом. и аэрономия», 2, № 1, 1962.

Поступила в редакцию
24. 10 1966 г.

НИИЯФ

УДК 531.16

Л. Д. АКУЛЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕВОЗМУЩЕННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПО ОБРАТНЫМ СТЕПЕНЯМ ЭНЕРГИИ

§ 1. Постановка задачи. При исследовании вращательных движений в возмущенных системах с одной степенью свободы, близких к консервативным, описываемых уравнениями вида

$$\ddot{x}+Q(x)=\varepsilon q,$$

а также несколько более общими, где x — одномерная координата, $\dot{x}\equiv\frac{dx}{dt}$, $t\in(-\infty,\infty)$ — независимая вещественная переменная, $\varepsilon>0$ — малый параметр, q — возмущающая функция; рассматривалось также невозмущенное уравнение (см. [1 — 4])

$$\ddot{x}+Q(x)=0, \tag{1}$$

относительно которого предполагалось, что при выполнении следующих условий относительно функции $Q(x)$ (см. [1, 3, 4]: $Q(x+2\pi)=Q(x)$, причем

$$\overline{Q}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(x)\,dx=0 \tag{2}$$

(независимо от параметров, которые еще могут входить в Q) и $E_0>|U|_{\max}$, где $E_0=\frac{\dot{x}^2}{2}+U(x)$ — сохраняющаяся «энергия», а $U(x)=\int Q(x)\,dx$ — периодический в силу (2) «потенциал» невозмущенной системы, а также некоторых условий гладкости, невозмущенное уравнение (1) имеет общее вращательное решение вида

$$x=\frac{2\pi}{T_0(E_0)}(t-t_0)+\tau+\varphi\left(\frac{2\pi}{T_0(E_0)}(t-t_0)+\tau,E_0\right), \tag{3}$$

где τ — произвольная фазовая постоянная, φ — периодическая по фазе $\psi = \omega_0 (t - t_0) + \tau$ функция с периодом 2π, а

$$T_0 (E_0) = \frac{2\pi}{\omega_0 (E_0)} = \int_0^{2\pi} \{2 [E_0 - U (x)]\}^{-1/2} dx, \tag{4}$$

«период» невозмущенного вращательного движения. Из (3) очевидно, что за любой промежуток времени $\Delta t = T_0$, если вращающаяся координата x получает приращение 2π, а $\dot{x}$ — периодическая в обычном смысле функция [3, 5]. К уравнениям (1) приводит исследование систем типа плоского маятника и др. [1—5].

В настоящей заметке доказывается предположение о существовании у уравнения (1) решения вида (3) и практически строится это уравнение в виде ряда по обратным степеням «энергии» для всех $t \in (-\infty, \infty)$, если функция Q достаточно гладкая, или последовательные приближения, если эта функция не может быть разложена в равномерно сходящийся ряд в окрестности произвольной точки.

В такой постановке задача в некотором смысле является вращательным аналогом системы Ляпунова [6], периодическое решение которой А. М. Ляпунов строил для аналитических уравнений в виде рядов по степеням параметра $\mu = \sqrt{C}$, где C — первый интеграл системы.

Вращательные системы с порождающим уравнением типа (1) в последнее время исследовались многими авторами, как правило, асимптотически на промежутке времени $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ или $t \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ с применением некоторой схемы усреднения (см. [2—5]). «Быстрые вращения» асимптотически исследовались с помощью метода усреднения в [2], где порождающее решение строилось тоже асимптотически по параметру $\mu = \frac{1}{\Omega}$ (Ω — большая начальная скорость вращения).

§ 2. Основные результаты. При построении вращательного решения будем исходить из известного соотношения $\dot{x} = \pm \{2 [E_0 - U(x)]\}^{1/2}$, где знак плюс соответствует условному положительному вращению, а минус — отрицательному. Второй случай полностью эквивалентен первому, если совершить замену $t \to -t$; поэтому ограничимся рассмотрением положительного вращения. В дальнейшем будем также предполагать, что периодическая функция $U(x) \geqslant 0$, чего всегда можно добиться добавлением некоторой положительной постоянной. Тогда соотношение

$$t - t_0 + \theta = \int \{2 [E_0 - U (x)]\}^{-1/2} dx \tag{5}$$

дает в неявном виде решение уравнения (1).

Покажем, что при $E_0 \geqslant U_{\max} + \delta$ ($\delta > 0$) (5) определяет общее вращательное решение уравнения (1) вида (3), зависящее от двух произвольных постоянных E_0 и θ. Если предположить, что функция $Q(x)$ непрерывна, то $U(x)$ будет также ограниченной для всех значений x:

$0 \leqslant U(x) \leqslant A$, где $A > 0$ — некоторая постоянная. Тогда при $E_0 \geqslant A + \delta$ вместо (5) можно написать

$$t - t_0 + \theta = \frac{1}{\sqrt{2E_0}} \int \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \left[\frac{U(x)}{E_0} \right]^j \right\} dx,$$

причем справа стоит монотонная функция x, производная которой строго положительна. Так как ряд под знаком интеграла сходится равномерно для всех x, то можно интегрировать каждый член ряда:

$$t - t_0 + \theta = \frac{x}{\sqrt{2E_0}} + \frac{1}{\sqrt{2E_0}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \mu^j \int V^j (x)\, dx, \tag{6}$$

где $0 \leqslant \mu \equiv \frac{A}{E_0} \leqslant 1 - \beta$ ($1 > \beta > 0$), а $V(x) \equiv \frac{U(x)}{A}$ — периодическая функция периода 2π, причем $0 \leqslant V(x) \leqslant 1$.

Введем следующее обозначение:

$$T_0 (E_0) = \frac{2\pi}{\sqrt{2E_0}} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \mu^j \overline{V^j} \right], \tag{7}$$

где $\overline{V^j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^j(x)\,dx$ — среднее, а $0 \leqslant \overline{V^j} \leqslant 1$. Очевидно также, что (7) и (4) совпадают. Исходя из (7), перепишем (6) следующим образом:

$$t - t_0 + \theta = \frac{T_0}{2\pi}x + \mu v_1(x, \mu, E_0), \tag{8}$$

где

$$v_1(x, \mu, E_0) \equiv \frac{1}{\sqrt{2E_0}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}\mu^{j-1}\int[V^j(x) - \overline{V^j}]\,dx.$$

периодическая функция x периода 2π: $v_1(x+2\pi, \mu, E_0) \equiv v_1(x, \mu, E_0)$. Умножив на $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ соотношение (8), перепишем в виде $x = \psi + \mu v(x, \mu)$, где $\psi = \omega_0(t - t_0) + \tau$, $\tau = \omega_0\theta$, $v(x, \mu) = -\omega_0(E_0)v_1(x, \mu, E_0)$, причем $v(x, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty}\mu^j v_j(x)$.

Полученное уравнение относительно x имеет единственное решение вида

$$x = \psi + \mu u(\psi, \mu); \tag{9}$$

где $u(\psi + 2\pi, \mu) \equiv u(\psi, \mu)$, если $\mu\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x\in[0,2\pi]} \leqslant 1 - \alpha\ (\alpha > 0)$, что, очевидно, выполняется при указанных значениях $\mu\ (0 \leqslant \mu \leqslant 1 - \beta)$. В случае знакопеременной функции $u(x)$ это условие выполняется, вообще говоря, если $\mu < \frac{1}{2}$.

Из предыдущих рассуждений можно заметить, что вращательное решение вида (9) или (3) уравнения (1) существует и единственно для всех значений $t \in (-\infty, \infty)$, если функция $Q(x)$ непрерывна. Или, распространяя результат на класс разрывных суммируемых функций, можно сказать, что вращательное решение существует для почти всех значений t и имеет непрерывную производную, если функция $Q(x)$ на промежутке $[0, 2\pi]$ имеет конечное число точек разрыва первого рода. Однако в этом случае требуется более строгое доказательство с привлечением понятий метрической теории дифференциальных уравнений, что не входит в задачу настоящей заметки.

Практически вращательное решение строится по обычной схеме последовательных приближений:

$$x_0 = \psi,\ x_1 = \psi + \mu v(x_0, 0) = \psi + \mu v_0(\psi), \ldots$$

$$x_{n+1} = \psi + \mu\sum_{j=0}^{n}\mu^j v_j(x_{n-j}), \ldots \tag{10}$$

или разложением в ряд по μ: $x = \psi + \sum_{j=1}^{\infty}\mu^j x_j(\psi)$, если v_j являются аналитическими функциями x.

Таким образом, справедливо утверждение о том, что невозмущенное уравнение (1) имеет общее вращательное решение вида (3) для всех $t \in (-\infty, \infty)$ периода (7), если функция $Q(x)$ непрерывна и периодична с периодом 2π, причем ее среднее $\overline{Q} = 0$ и $E_0 \geqslant U_{\max} + \delta$, $(\delta > 0)$. И это решение может быть построено единственным образом по схеме (10).

Доказательство того факта, что единственное дважды непрерывно дифференцируемое решение (9) уравнения (5) является также единственным общим решением дифференциального уравнения (1) не представляет трудности. Следовательно, построенное решение неустойчиво по Ляпунову (в обе стороны).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. матем., механ., № 6, 34, 1966.
2. Моисеев Н. Н. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 3, № 1, 145, 1963.
3. Черноусько Ф. Л. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 3, № 1, 131, 1963.

4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. ДАН СССР, **151**, № 6, 1260, 1963.
5. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», **17**, № 6, 3, 1962.
6. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.

Поступила в редакцию
27. 10 1966 г.

Кафедра
математики

УДК 539.12.01

Д. Д. ИВАНЕНКО, Б. Н. ФРОЛОВ

ОБЪЕДИНЕННОЕ ОПИСАНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Согласно теореме А. Фридмана [1] псевдориманово многообразие $V_n(p, q)$ $(n = p + q)$ может быть локально погружено в псевдоевклидово пространство $E_m(\bar{p}, \bar{q})$, где $m \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$, $\bar{p} \geqslant p$, $\bar{q} \geqslant q$, $m = \bar{p} + \bar{q}$. Из этой теоремы вытекает, что наименьшим (в смысле размерности) псевдоевклидовым пространством, в которое может быть локально погружено реальное пространство — время V_4 (1, 3), будет $E_{10}(\bar{p}, \bar{q})$, где $\bar{p} + \bar{q} = 10$ и $\bar{p} \geqslant 1$, $\bar{q} \geqslant 3$. Для определенности выберем E_{10} (1, 9).

В пространстве $E_{10}(1,9)$ выделим касательное к $V_4(1,3)$ подпространство $E_4(1,9)$, фундаментальной группой [2, 3] которого является однородная группа Лоренца 0(1,3), а ортогональное к нему подпространство оснащения (по терминологии Схоутена [3]) будет E_6 с фундаментальной группой 0(6). Таким образом, $V_4(1,3)$ становится оснащенным римановым пространством [3]. Фундаментальной группой всего объемлющего пространства $E_{10}(1,9)$ является группа 0(1,9).

Будем теперь рассматривать группу 0(1,9) в качестве группы симметрии элементарных частиц. Эта группа содержит в качестве подгруппы, с одной стороны, группу Лоренца 0(1,3), действующую в касательном пространстве и связанную со спиновыми свойствами частиц, а с другой стороны, действующую в подпространстве оснащения группу 0(6), описывающую внутренние изотопические свойства частиц. Группа 0(6) локально изоморфна группе $SU(4)$ и в свою очередь содержит в качестве подгруппы группу $SU(3)$ и группу 0(5). Последнее существенно, так как представление $D(1,0)$ группы 0(5) можно попытаться отождествить с четырьмя лептонами [6—10].

Аналогом группы SU (6) в данной теории является группа 0(9). Интересно отметить, что группа 0(9) является наименьшей (в смысле ранга) физически допустимой группой, содержащей в качестве своей подгруппы прямое произведение $SU(3) \times 0(3)$. Фундаментальное спинорное представление группы 0(9) является шестнадцатикомпонентным и при редукции $0(9) \supset SU(3) \times 0(3)$ описывает октет барионов со спином $1/2$.*. Полная группа 0(1,9) представляет собой релятивистское обобщение группы 0(9). Группа 0(1,9) имеет два типа фундаментальных 16-компонентных представлений, связанных друг с другом операцией «зеркального сопряжения» [11, 12]. Переход к группе 0(1,9) соответствует переходу от двухкомпонентных спиноров к четырехкомпонентным. В теории группы 0(1,9) октетный мультиплет является наименьшим, и кварковых представлений не возникает.

Таким образом, группа 0(1,9) является аналогом однородной группы Лоренца 0 (1,3), но уже учитывающим наряду с внешними также внутренние, т. е. изотопические свойства элементарных частиц.

Интересно отметить, что в данном подходе возникают два различных аналога спецрелятивистского понятия спинового момента. Один из них связан с группой Лоренца, действующей в касательном пространстве, и назван нами «внутренним» спиновым моментом. Эта величина по своим свойствам является таким же внутренним квантовым числом, как изоспин и гиперзаряд. С другой стороны, существует также величина, которую разумно назвать «внешним» спиновым моментом, которая связана с преобра-

---

* Группа 0 (8), также содержащая прямое произведение $SU(3) \cdot SU(2)$, имеет два типа фундаментальных восьмикомпонентных представлений, связанных друг с другом операцией «зеркального сопряжения» [11, 12], которые не могут описывать унитарный октет спина $1/2$.