Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1967

УДК 533.9

Б. ЧАКРАБОРТИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Разработана нелинейная теория распространения эллиптически поляризованных электромагнитных волн в неограниченной и однородной плазме на основе уравнений Власова.

Введение

Нелинейная теория распространения плоскополяризованной электромагнитной волны в нелинейной диспергирующей диэлектрической среде была развита Ахмановым и Хохловым [1], а также Блоембергеном и другими [2, 3]. Разработанную ими на основе классических максвелловских уравнений электродинамики детальную теорию нельзя перенести на плазменную среду, так как динамика распространения волн в плазменной среде учитывает такие факторы, которых нет в среде, состоящей из диполей: тепловое движение центров тяжести частиц, отсутствие локализации электронов у соответствующих ядер, особый вид нелинейности, диктуемый исходными кинетическими уравнениями.

Нелинейные эффекты при распространении волн в плазме были рассмотрены также в работах [4—11]. В большинстве этих работ [4—9] изучаются нелинейные явления при учете существования только продольных волн в среде. Данная статья не претендует на полное выяснение разнообразных нелинейных эффектов в неограниченной плазме, в ней выясняются только эффекты, обусловленные поперечными волнами в однородной плазме, в которой отсутствуют продольные колебания, вызванные источниками продольных волн или тепловыми причинами. Содержание статьи имеет связь только с работами [10] и [11], т. е. несколько уточняет полученные в них данные.

В этой статье решаются уравнения Власова методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения рассматривается однородная электронная плазма, объемный заряд которой скомпенсирован фоном положительных ионов, с равновесной функцией распределения без средней скорости дрейфа, при полном отсутствии поперечных волн. В первом приближении учитываются только поперечные волны, эллиптически поляризованные и имеющие компоненты $E_{t_1}\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ и $E_{t_2}\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ вдоль двух взаимно перпендикуляр-

ных направлений, что возможно благодаря аддитивности эффектов в рамках линейного приближения.

К нелинейным эффектам, которые выступают и вычисляются во втором приближении, относится постоянная составляющая электрического тока (электронный ветер) и характеристики продольной волны, возбуждающейся поперечной волной первого приближения. В третьем приближении получаются добавки второго порядка малости к частоте

$\delta\omega_{\perp_1}$ в плоскости, содержащей волну $E_{t_1}\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ и

$$\delta\omega_{\perp_2} \text{ для } E_{t_2}\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t),$$

а также поперечные волны первой и третьей гармоники третьего порядка малости.

Заметим, что во всех работах, посвященных вычислению высших гармоник при распространении волн в плазме, а также в диэлектрических средах, используют исходную волну в виде только одной из двух функций $\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ и $\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$. Суперпозиция соответствующих результатов для cos и sin не дает полностью результатов, полученных при использовании выражения $a\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)+b\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$. Это легко показать тригонометрическими формулами

$$(a\sin\theta+b\cos\theta)^2=\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\theta+\frac{b^2+a^2}{2}+ab\sin 2\theta,$$

$$a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta=\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2\theta+\frac{b^2+a^2}{2},$$

а также формулами для $(a\sin\theta+b\cos\theta)^3$ и $a^3\sin^3\theta+b^3\cos^3\theta$, где $\theta=\vec{k}\vec{r}-\omega t$, потому что второе и третье приближения функций распределения имеют вид, подобный второй и третьей степеням функции распределения линейного приближения.

Головко [6] и Богданов [4], [10] вычисляли нелинейные эффекты, исходя из уравнений Власова методом последовательных приближений, однако в работах [6] и [4] учтены только потенциальные (электростатические) силы взаимодействия между частицами. В работе [10] рассмотрена задача распространения плоскополяризованной волны, пренебрегая силовым членом $\frac{\vec{v}\times\vec{H}}{c}$, учет которого является, однако, принципиальным для некоторых нелинейных эффектов. Кроме того, не вычислялись добавки к фону во втором и к частоте в третьем приближениях.

Монтгомери и Тидман [11] рассмотрели нашу задачу в рамках гидродинамического приближения при нулевой температуре плазмы для плоской волны. Они не учитывали постоянной составляющей электрического тока и вычисляли продольную волну во втором и поправку к частоте в третьем приближениях. Получена положительная поправка к частоте (т. е. смещение в сторону ультрафиолета). В нашем же случае поправка отрицательная, т. е. имеется смещение в красную сторону.

Чен [14] изучал нелинейную реакцию плазмы на высокочастотные электромагнитные колебания, решая нелинейное уравнение. Однако он с самого начала полностью пренебрегал изменениями полей и функции распределения по координатам, оставляя только зависимость от времени и от скоростей электронов.

§ 1. Исходные уравнения и линейное приближение

Функция распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ для электронов удовлетворяет следующим уравнениям [12]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\right) f + \frac{e}{m}\left\{\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}x\vec{H}]\right\}\vec{\nabla}_{\vec{v}} f = 0, \tag{1}$$

$$rot\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi e}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\vec{v}\{f - Nf_0\}\,d\vec{v}, \quad rot\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0,$$

$$div\,\vec{E} = 4\pi e\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f - Nf_0)\,d\vec{v}, \tag{2}$$

где e — отрицательный заряд электронов и

$$f_0(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi xT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{m}{xT}v^2\right).$$

В линейном приближении положим

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = Nf_0(\vec{v}) + f_1(\vec{r}, \vec{v}, t),$$

где $f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \ll Nf_0(\vec{v})$. Для того чтобы ввести в дальнейшем в рассмотрение эллиптически поляризованную волну, представим $f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$ в виде

$$f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = g_1(\vec{v})\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + g_2(\vec{v})\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t).$$

Чтобы исключить продольную волну в линейном приближении на функции $g_1(\vec{v})$ и $g_2(\vec{v})$, необходимо наложить условия

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_i(\vec{v})\,d\vec{v} = 0, \qquad i = 1,\ 2.$$

Пусть знак $\|$ обозначает продольное направление, а знаки $\perp_1$ и $\perp_2$ — два взаимно перпендикулярных направления нормальных к волновому вектору. Величины, имеющие эти знаки, будут представлять собой компоненты векторов вдоль этих направлений. Для того чтобы получить эллиптически поляризованные исходные волны, имеющие главную ось вдоль $\perp_1$ и малую ось вдоль $\perp_2$, полагаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_2} g_1(\vec{v})\,d\vec{v} = 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} g_2(\vec{v})\,d\vec{v} = 0,$$

$$E_{|\perp_1} = E_{t_1}\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t),$$

$$E_{|\perp_2} = E_{t_2}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t).$$

Тогда из исходных уравнений получаем

$$(E_{t_1}, E_{t_2}) = \frac{4\pi e\omega}{\omega^2 - k^2c^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} g_1(\vec{v})\, d\vec{v} - \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_2} g_2(\vec{v})\, d\vec{v}\right\},$$

$$f_1(\vec{r}, \vec{v}t) = \frac{Ne}{m}\frac{m}{xT}\frac{f_0(\vec{v})}{\omega - kv_{\parallel}}\Big[E_{t_1} v_{\perp_1} \times \tag{3}$$

$$\times \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - E_{t_2} v_{\perp_2} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\Big],$$

где $\omega_0 = \left(4\pi e^2 \frac{N}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ — плазменная частота и $E_{|\perp_1}$ и $E_{|\perp_2}$ есть компоненты электрического поля первого приближения вдоль направлений $\perp_1$ и $\perp_2$ соответственно. Уравнения (3) связывают амплитуды исходных волн и интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} g_1(\vec{v})\, d\vec{v}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_2} g_2(\vec{v})\, d\vec{v}$, пропорциональные амплитудам электрического тока, вдоль указанных направлений.

В дальнейшем вместо плоскость, содержащая главную ось и волновой вектор, будем писать плоскость $\perp_1$ и аналогично: плоскость $\perp_2$. Обозначим $g_i(\vec{v})$ символом $g_{\perp_i}(\vec{v})$ $(i = 1, 2)$, потому что $g_{\perp_1}(\vec{v})\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ дает число частиц, возбуждающих волну в плоскости $\perp_1$, и аналогично: $g_{\perp_2}(\vec{v})\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$. Из исходных уравнений в линейном приближении в качестве условия разрешимости в виде волн получаем следующее дисперсионное соотношение [12]:

$$\frac{\omega^2 - k^2c^2}{\omega_0^2\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(v_{\parallel})\, dv_{\parallel}}{\omega - kv_{\parallel}}, \tag{4}$$

где

$$F(v_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty} f_0(\vec{v})\, dv_{\perp_1} dv_{\perp_2}.$$

Подразумевается главное значение этого интеграла потому, что более строгое рассмотрение приводит практически к тому же результату.

§ 2. Второе приближение

Подставим

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = Nf_0(\vec{v}) + f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) + f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

в уравнение (1), сохраняя только члены второго порядка малости. Тогда получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\right) f_2 + \frac{Ne}{m}\left(E_{2\parallel}\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} + E_{2\perp_1}\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp_1}} + E_{2\perp_2}\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp_2}}\right) =$$

$$= -\frac{e}{m}\left(E_{1\perp_1}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_1}} + E_{1\perp_2}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_2}}\right) -$$

$$-\frac{e}{me}\left\{v_{\parallel}\left(H_{1\perp_1}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_2}} - H_{1\perp_2}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_1}}\right) + \right.$$

$$\left. + (v_{\perp_1}H_{1\perp_2} - v_{\perp_2}H_{1\perp_1})\frac{\partial f_1}{\partial v_{\parallel}}\right\}. \qquad (5)$$

Представим первое (линейное) приближение в виде

$$f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) = e^{-\gamma t}\{g_{\perp_1}(\vec{v})\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + g_{\perp_2}(\vec{v})\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}$$

и, подставляя в (2), найдем

$$E_{1\perp_1} = 4\pi e e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} g_{\perp_1}(\vec{v})\, d\vec{v}\, \{\omega(\omega^2 - k^2\cdot c^2 + \gamma^2)\times$$

$$\times \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + \gamma(\omega^2 + k^2c^2 + \gamma^2)\times$$

$$\times \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}\{(\omega^2 - k^2c^2 - \gamma^2) + H\gamma^2\omega^2\}^{-1}$$

и подобные же выражения для $E_{|\perp_2}$, $H_{|\perp_1}$ и $H_{|\perp_2}$. Здесь γ произвольная постоянная, которая в конечном результате стремится к нулю. Функция $e^{-\gamma t}$ вводится искусственно в $f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$ с целью получить единственность решения уравнения второго и третьего приближений [6]. Введение подобной функции приводит к изменению функции нулевого приближения $f_0(\vec{v})$ (изменяется фон), что в свою очередь ведет к важным нелинейным эффектам. Физически введение γ учитывает ограничение во времени волновых процессов при $t \to \infty$ и $\gamma > 0$. Введение γ нельзя связывать обязательно с трением, так как достигаются одинаковые результаты и при $\gamma < 0$.

Пренебрегая в правой части (5) членами, содержащими γ в выражениях при $\cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t)$ и $\sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t)$ и оставляя γ в членах, не содержащих этих функций, имеем

$$\frac{e}{m}\left(E_{|\perp_1}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_1}} + E_{|\perp_2}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_2}}\right) + \frac{ev_{\parallel}}{mc}\left(H_{|\perp_1}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_2}} - \right.$$

$$\left. - H_{|\perp_2}\frac{\partial f_1}{\partial v_{\perp_1}}\right) = Ne^2\frac{m}{xT}(2m^2\omega)^{-1}\frac{f_0}{\omega - kv_{\parallel}}\times$$

$$\times\left[(\omega - kv_{\parallel})\sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t)\left\{E_{t_1}^2\left(1 - \frac{m}{xT}v_{\perp_1}^2\right) - \right.\right.$$

$$\left. - E_{t_2}^2\left(1 - \frac{m}{xT}v_{\perp_2}^2\right)\right\} + \gamma e^{-2\gamma t}(\omega^2 - k^2c^2)\times$$

$$\times\{(\omega^2 - k^2c^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\}^{-1}(\omega^2 + k^2c^2 + \gamma^2 -$$

$$- 2\omega k v_{\parallel})\left\{E_{t_1}^2\left(1 - \frac{m}{xT}v_{\perp_1}^2\right) + E_{t_2}^2\left(1 - \frac{m}{xT}v_{\perp_2}^2\right)\right\} +$$

$$\left. + 2E_{t_1}E_{t_2}\frac{m}{xT}v_{\perp_1}v_{\perp_2}(\omega - kv_{\parallel})\cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t)\right], \qquad (6)$$

$$\frac{e}{mc}(v_{\perp_1}H_{|\perp_2} - v_{\perp_2}H_{|\perp_1})\frac{\partial f_1}{\partial v_{\parallel}} =$$

$$= Ne^2 \frac{m}{xT} (2m^2\omega)^{-1} k \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(\frac{f_0}{\omega - kv_{\parallel}} \right) [E_{t_1}^2 v_{\perp_1}^2 - E_{t_2}^2 v_{\perp_2}^2) \times$$

$$\times \sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t) - 2E_{t_1}E_{t_2}v_{\perp_1}v_{\perp_2}\cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t) +$$

$$+ e^{-2\gamma t}(E_{t_1}^2 v_{\perp_1}^2 + E_{t_2}^2 v_{\perp_2}^2) 2\gamma\omega(\omega^2 + k^2c^2) \times$$

$$\times \{(\omega^2 - k^2c^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\}^{-1}. \tag{7}$$

Полагая

$$f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) = \Phi_1(\vec{v}) e^{-2\gamma t} + \Phi_2(\vec{v}) \cos(2\vec{k}\vec{r} -$$

$$- 2\omega t) + \Phi_3(\vec{v}) \sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t) \tag{8}$$

и приравнивая справа и слева коэффициенты при $e^{-2\gamma t}$, $\sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t)$ и $\cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t)$, вычисляем $\Phi_1(\vec{v})$, $\Phi_2(\vec{v})$ и $\Phi_3(\vec{v})$. Как видим уравнение это удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}
\int_{-\infty}^{\infty} \vec{v}_{\perp} \{ \Phi_1(\vec{v}), \Phi_2(\vec{v}) \} d\vec{v} = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\vec{v}) d\vec{v} = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_3(\vec{v}) d\vec{v} = 0, \\
\int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} \Phi_3(\vec{v}) d\vec{v} = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Формула (8) совместно с (2) показывает, что поперечная волна во втором приближении не возбуждается. Уравнение (9) показывает, что число частиц (нормировано) не изменяется благодаря изменению фона.

Функции распределения второго приближения приводят к двум нелинейным эффектам для усредненных величин — к возбуждению продольной волны второй гармоники и к наличию волнового электронного ветра.

Полагаем

$$\frac{2\pi e}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\vec{v}) d\vec{v} \sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t) =$$

$$= E_l \sin(2\vec{k}\vec{r} - 2\omega t) = E_{2\parallel}, \tag{10}$$

$$e \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} \Phi_1(\vec{v}) d\vec{v} = \delta j,$$

где E_l — амплитуда продольной волны второй гармоники и δj — волновой ветер, имеем

$$E_l = (E_{t_1}^2 - E_{t_2}^2) \frac{ke\omega_0^2}{8m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F dv_{\parallel}}{(\omega - kv_{\parallel})^2} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{\omega_0^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F dv_\parallel}{(\omega - kv_\parallel)^2}\right\}^{-1},$$

$$\delta j = -(E_{t_1}^2 - E_{t_2}^2) \frac{ke\omega\omega_0^4}{8\pi m} \times \tag{11}$$

$$\times \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F dv_\parallel}{\omega - kv_\parallel} \right)^2 \{(\omega^2 - k^2c^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\}^{-1}.$$

При переходе к вакууму $\omega_0^2 = 0$, $\delta j = 0$ и $E_l = 0$. Отметим, что волновой ветер обусловлен поперечными волнами, а не продольными, как в работе [6].

Заметим, что ответственным за появление нелинейных эффектов во втором приближении является компонент силового члена $\frac{[\vec{v} x \vec{H}]}{c}$ вдоль волнового вектора поперечной волны. Без учета этого члена не появляются продольная волна и волновой ветер, кроме того эффекты третьего приближения (см. § 3) обращаются в нуль. Дисперсия скоростей в направлении, перпендикулярном плоскости поляризации волны, обусловлена только вихревым электрическим полем. Если круговая поляризация и имеет место, то $E_l = 0$, а продольная волна исчезает. Если волна плоско поляризована, то знак E_l изменяется при изменении фазы исходной волны на 90°.

Величины

$$\delta\rho = me \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f - Nf_0 - \Phi_1\} d\vec{v} \text{ и } \delta J = me \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{v}\{f - Nf_0 - \Phi_1\} d\vec{v}$$

удовлетворяют соотношению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho + \vec{\nabla} \delta \vec{J} = 0$$

$\left(\text{т. е. соотношению } \omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\vec{v}) d\vec{v} = k \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_\parallel \Phi_2(\vec{v}) d\vec{v}\right)$.

Интегралы $m \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_l v_j f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$, где $v_l = (v_\parallel, v_{\perp_1}, v_{\perp_2})$, $l = (i, j)$ дают элементы тензорных добавок к статическому скалярному давлению равновесного состояния. При $E_{t_2} = 0$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_2}^2 f_2(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ дает дисперсию скоростей перпендикулярно относительно плоскости поляризации плоской волны.

Как и в работах [6—8], поправки к частоте не появляются во втором приближении, потому что правые части выражений (6) и (7) не имеют первой гармоники.

§ 3. Третье приближение

В третьем приближении появляются два новых нелинейных эффекта: изменение частоты первой гармоники, различное для волн в плоскостях $\perp_1$ и $\perp_2$, и возникновение поперечных волн третьей гармоники. Характеристики продольной волны третьего приближения те же,

что и второго. Поправки к частоте возникают за счет необходимости сохранить только одно дисперсионное уравнение (4). Полагаем

$$
\begin{aligned}
f(\vec{r}, \vec{v}, t) = Nf_0(\vec{v}) + g_{\perp_1}(\vec{v}) \cos(\vec{k}\vec{r} - \Omega_1 t) + \\
+ g_{\perp_2}(\vec{v}) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \Omega_2 t) + \Phi_1(\vec{v}) + \\
+ \Phi_2'(\vec{v}) \cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\Omega_1 t) + \\
+ \Phi_2''(\vec{v}) \cos(2\vec{k}\vec{r} - 2\Omega_2 t) + \\
+ \Phi_3(\vec{v}) \sin(2\vec{k}\vec{r} - \overline{\Omega_1 + \Omega_2} t) + f_3(\vec{r}, \vec{v}, t),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $\Phi_2'(\vec{v})$ и $\Phi_2''(\vec{v})$ являются аддитивными слагаемыми с коэффициентами $E_{t_1}^2$ и $E_{t_2}^2$. Введем разные частоты $\Omega_1 (= \omega + \delta\omega_{\perp_1})$ и $\Omega_2 (= \omega + \delta\omega_{\perp_2})$ с добавками $\delta\omega_{\perp_1}$ и $\delta\omega_{\perp_2}$: волны в плоскости $\perp_2$ имеют поправку $\delta\omega_{\perp_1}$, а волны в плоскости $\perp_2 - \delta\omega_{\perp_2}$. Волны в этих двух плоскостях должны распространяться с разными фазовыми, а также групповыми скоростями.

Аналогично (5) не трудно получить уравнение третьего приближения, подставив (10) в (1) и сохранив только члены третьего порядка малости. В правой части получаем выражения, которые можно разделить на две группы. К первой группе отнесем члены, имеющие гармоники $\{\vec{k}\vec{r} - (\omega + \delta\omega_{\perp_1}) t\}$, $\{\vec{k}\vec{r} - (\omega + 2\omega_{\perp_2} - \delta\omega_{\perp_1}) t\}$,

$$\{3\vec{k}\vec{r} - (3\omega + 3\delta\omega_{\perp_1}) t\}, \ \{3\vec{k}\vec{r} - (3\omega + \delta\omega_{\perp_1} + 2\delta\omega_{\perp_2}) t\},$$

потому, что они дают поперечные волны третьего приближения в плоскости $\perp_1$. Во вторую группу будут входить гармоники

$$\{\vec{k}\vec{r} - (\omega + \delta\omega_{\perp_2}) t\},$$

$$\{\vec{k}\vec{r} - (\omega + 2\delta\omega_{\perp_1} - \delta\omega_{\perp_2}) t\}, \ \{3\vec{k}\vec{r} - (3\omega + 3\delta\omega_{\perp}) t\},$$

$$\{3\vec{k}\vec{r} - (3\omega + 2\delta\omega_{\perp_1} + \delta\omega_{\perp_2}) t\},$$

которые дают волны в плоскости $\perp_2$. Если выражения электрического поля есть функции $\sin\theta$, где θ — любая из этих гармоник, то интеграл от функции скоростей, дающий амплитуду волн в плоскости $\perp_2$, обращается в нуль, а в плоскости $\perp_1$ отличен от нуля. Подобно этому у $\cos\theta$ амплитуда волн в плоскости $\perp_1$ равна нулю, а в плоскости $\perp_2$ отлична от нуля.

Для простоты предполагаем, что разница между разными первыми и третьими гармониками играет существенную роль только в более высших, чем в третьем, приближениях. Поэтому всюду в дальнейшем напишем Ω вместо Ω_1, Ω_2, $2\Omega_1 - \Omega_2$ и $2\Omega_2 - \Omega_1$, а также 3Ω вместо $3\Omega_1$, $3\Omega_2$, $2\Omega_1 + \Omega_2$, $\Omega_1 + 2\Omega_2$. Однако получаем выражение для $\delta\omega_{\perp_1}$ из уравнения, полученного при сравнении коэффициентов при $\sin\theta$ справа и слева, а выражение для $\delta\omega_{\perp_2}$ из коэффициентов при $\cos\theta$. Аналогично (6) и (7) имеем выражения для членов правой части уравнения третьего приближения. Подставим в это уравнение

$$
\begin{aligned}
f_3(\vec{r}, \vec{v}, t) = \psi_1(\vec{v}) \cos(\vec{k}\vec{r} - \Omega t) + \psi_3(\vec{v}) \cos(3\vec{k}\vec{r} - 3\Omega t) + \\
+ \rho_1(\vec{v}) \sin(\vec{k}\vec{r} - \Omega t) + \rho_3(\vec{v}) \sin(3\vec{k}\vec{r} - 3\Omega t),
\end{aligned}
$$

приравняем коэффициенты при $\sin(\vec{k}\vec{r}-\Omega t)$, $\cos(\vec{k}\vec{r}-\Omega t)$, $\sin(3\vec{k}\vec{r}-3\Omega t)$ и $\cos(3\vec{k}\vec{r}-3\Omega t)$ справа и слева, упростим с помощью следующих проверенных результатов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_2}\{\psi_1(\vec{v}),\ \psi_3(\vec{v})\}d\vec{v}=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1}\{\rho_1(\vec{v}),\ \rho_3(\vec{v})\}\,d\vec{v}=0, \tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\psi_1(\vec{v}),\ \psi_3(\vec{v}),\ \rho_1(\vec{v}),\ \rho_3(\vec{v})\}d\vec{v}=0$$

и разделим на $\Omega-kv_{\parallel}$. Тогда получим уравнения для определения $\delta\omega_{\perp_1}$, $\delta\omega_{\perp_2}$ и амплитуд волн. После интегрирования по скоростям получаем окончательно

$$\delta\omega_{\perp_1}\left[\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^2}+\frac{\omega^2+k^2c^2}{\omega\omega_0^2}\right]=$$

$$=(E_{t_1}^2-E_{t_2}^2)\frac{ke^2}{32m^2\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^3}\times$$

$$\times\left\{\omega_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(2\omega-kv_{\parallel})Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^3}-4\right\}\left\{1-\frac{\omega_0^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^2}\right\}^{-1}+$$

$$+E_{t_1}^2\frac{k^2e^2}{4m^2\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^3}-(3E_{t_1}^2-E_{t_2}^2)\frac{3k^4e^2\frac{xT}{m}}{8m^2\omega}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^5}-(3E_{t_1}^2+E_{t_2}^2)\frac{k^4e^2}{m}\frac{xT}{m}(\omega^2-k^2c^2)\times$$

$$\times\{(\omega^2-k^2c^2-\gamma^2)^2+4\gamma^2\omega^2\}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^4}-$$

$$-E_{t_1}^2\frac{k^2e^2}{m^2}(\omega^2-k^2c^2)\{(\omega^2-k^2c^2-\gamma^2)^2+4\gamma^2\omega^2\}^{-1}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Fdv_{\parallel}}{(\omega-kv_{\parallel})^2}$$

и аналогично для $\delta\omega_{\perp_2}$. Пусть $E_{3t_1}\sin(3\vec{k}\vec{r}-3\Omega t)$ обозначает волну третьей гармоники, находящуюся в плоскости $\perp_1$, и $E_{3t_2}\cos(3\vec{k}\vec{r}-3\Omega t)$ в плоскости $\perp_2$. Тогда получаем

$$(E_{3t_1}, E_{3t_2}) = \frac{4\pi e\omega}{3(\omega^2 - k^2c^2)}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 1}\psi_3(\vec{v})\,d\vec{v},\ -\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 2}\rho_3(\vec{v})\,d\vec{v}\right\}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 1}\psi_3(\vec{v})\,d\vec{v} = E_{t_1}\frac{3k^2e\omega_0^2}{(32)^2 m^2\omega^2}\left[(E_{t_1}^2 - E_{t_2}^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F\,dv_\parallel}{(\omega - kv_\parallel)^3}\left\{\omega_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(2\omega + kv_\parallel)F\,dv_\parallel}{(\omega - kv_\parallel)^3} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 4\right\}\left\{1 - \frac{\omega_0^2}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F\,dv_\parallel}{(\omega - kv_\parallel)^2}\right\}^{-1} + E_{t_1}^2\cdot 8\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F\,dv_\parallel}{(\omega - kv_\parallel)^3} + \right.$$

$$\left. + (3E_{t_1}^2 - E_{t_2}^2)\cdot 12k^2\frac{xT}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F\,dv_\parallel}{(\omega - kv_\parallel)^5}\right] \tag{15}$$

и аналогично $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 2}\rho_3(\vec{v})\,d\vec{v}$.

Сохраняя величины первой степени по $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ и $\frac{xT}{m}\frac{1}{c^2}$, имеем при $\gamma = 0$ приблизительно

$$\frac{\delta\omega_{\perp 1}}{\omega} = \left[-E_{t_1}^2\left\{1 - \frac{\omega_0^2}{8\omega^2} + 5\frac{xT}{m}\frac{1}{c^2}\right\} + \right.$$

$$\left. + E_{t_2}^2\left\{\frac{\omega_0^2}{8\omega^2} - \frac{xT}{m}\frac{1}{c^2}\right\}\right]\frac{e^2}{2m^2c^2\omega^2}.$$

Для относительного изменения частоты в зависимости от температуры получаем

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial T}(\delta\omega_{\perp 1}) = \left[-E_{t_1}^2\left(5 + \frac{3}{8}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) - E_{t_2}^2\left(1 - \frac{9}{8}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{x}{m}\frac{1}{2\omega^2c^2}\left(\frac{e}{mc}\right)^2.$$

Если температура увеличивается, то изменение частоты в красную сторону возрастает. При $\gamma = 0$ и $E_{t_2} = 0$ имеем $\delta\omega_{\perp 1} < 0$. Вычисление величин $\frac{\partial}{\partial k}(\delta\omega_{\perp 1})$ и $\frac{\partial}{\partial k}(\delta\omega_{\perp 2})$ дает разные добавки к групповой скорости волн. При $T = 0$ и $\gamma = 0$ имеем приближенно

$$\frac{\partial}{\partial k}(\delta\omega_{\perp 1}, \delta\omega_{\perp 2}) \approx (E_{t_1}^2, E_{t_2}^2)\left(1 - \frac{7}{8}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\frac{e}{2m^2\omega^2c}.$$

При круговой поляризации $E_{t_1} = E_{t_2}$ и, следовательно, $\delta\omega_{\perp 1} = \delta\omega_{\perp 2}$ и $E_{3t_1} = E_{3t_2}$.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 1}\psi_1(\vec{v})\,d\vec{v}$ можно определить из уравнения для $\psi_1(\vec{v})$, если после интегрирования разложить по степеням $\delta(\omega_{\perp 1})$, приравнять справа и слева величины пятого порядка малости и сократить $\delta(\omega_{\perp 1})$ в обеих сторонах. Аналогично же имеем для $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 2}\rho_1(\vec{v})\,d\vec{v}$.

В заключение выражаю благодарность проф. А. А. Власову за предложенную тему и систематическую помощь в работе, рецензенту за некоторые замечания, а также В. А. Головко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., изд. ВИНИТИ, 1964.
2. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. Phys. Rev., **127**, 1918, 1962.
3. Bloembergen N., Pershan P. S. Phys. Rev., **128**, 606, 1962.
4. Богданов А. В. «Уч. зап. МОПИ», **33**, 147, 1955.
5. Sturroek P. A. Proc. Roy. Soc., **242 A**, 1230, 277, 1957. (Перевод Сб. «Колебания в сверхвысоких частотах в плазме». М., ИЛ, 1961, стр. 245).
6. Головко В. А. ЖЭТФ, **47**, 1765, 1964.
7. Tidman D. A., Stainer H. M. Phys. Fluids., **8**, 345, 1965.
8. Nayteh A. H. Phys. Fluids., **8**, 1896, 1965.
9. Рютов Д. Д. Диссертация. ФИАН, 1965.
10. Богданов А. Б. «Уч. зап. МОПИ», **33**, 63, 1955.
11. Montgomery D., Tidman D. A. Phys. Fluids., **7**, 242, 1964.
12. Власов А. А. Теория многих частиц. М., Гостехиздат, 1950; ЖЭТФ, **8**, 291, 1938.
13. Гершман Б. Н. ЖЭТФ, **24**, 453, 1953.
14. Kun-Hu Chen. IRE Trans., **AP-10**, 31, 1962.

Поступила в редакцию
1. 12 1965 г.

Кафедра
теоретической физики