Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1967

УДК 534.26

В. К. КУЗНЕЦОВ

РЕФРАКЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В КЛИНЕ

Приводятся расчеты, описывающие рефракцию нормальных волн в клине, результаты этих расчетов хорошо согласуются с экспериментом, как это видно из помещенной здесь осциллограммы.

Постановка рассмотренной нами задачи определилась практической потребностью гидроакустики выяснить характер распространения акустических волн в мелком море при условии наклонного дна. Идеализируя в известной степени натурные условия распространения, мы приходим к задаче распространения в клине с идеально отражающими границами, т. е. в сущности к задаче дифракции волн на клине. Более чем за полвека оптическому и радиотехническому вариантам этой задачи было посвящено много работ [1], в которых теоретическое исследование ведется зоммерфельдовским методом отображения в разветвленном римановом пространстве. Этот метод, хотя и дает формально пригодное для любого угла раствора рассматриваемой угловой области решение, для областей с малым углом, как например в гидроакустическом случае жидкого клина, это решение оказывается не эффективным, поскольку метод становится не совсем адекватным. Более адекватным в этом случае является метод, основанный на концепции нормальных волн [2], в соответствии с которым поле в клине представляется суперпозицией полей нормальных волн вида

$$\psi_m = N_m r^{-1/2} W_m(r, z)\, \Phi_m(\varphi), \tag{1'}$$

где $m=0, 1, 2, 3, \ldots$, $\Phi_m(\varphi)$ — тригонометрическая функция, или в соответствии с характером границ клина (акустически мягкие, акустически жесткие или смешанные границы), N_m обозначает константу, характеризующую интенсивность возбуждения нормальной волны порядка m, а функция $W_m(r, z)$, описывающая распространение нормальной волны в плоскости $\varphi=\mathrm{const}$, находится решением двухмерного волнового уравнения для слоистонеоднородной среды, показатель преломления которой зависит от координаты r следующим образом:

$$n_m = \left[1 - \frac{4\mu_m^2 - 1}{4k_0^2 r^2}\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь k_0 — волновое число для среды, заполняющей клин. (Смысл других обозначений виден из рис. 1.) Из сказанного следует, что рас-

пространение нормальных волн в клине происходит аналогично распространению волн в слоистонеоднородной среде, и эта аналогия дает основание говорить о рефракции нормальных волн. Вид функции $W_m(r, z)$, представляющей конфигурацию поля нормальной волны в плоскости (r, z), определяется видом источника нормальной волны. Когда мы далее рассматриваем поле сосредоточенного, «точечного», источника нормальных волн, мы подразумеваем под этим гипотетический источник, изображенный на рис. 1 в виде дуги Ay_0B с соответствующим данному порядку нормальной волны распределением амплитуды колебаний вдоль дуги. При определении функции $W(r, z)$ этот источник представляется точечным источником, имеющим логарифмическую особенность, координаты которой есть координаты следа дуги Ay_0B в плоскости $\varphi=\text{const}$: $r=r_0$, $z=0$. Для определенности возьмем плоскость $\varphi=\frac{\varphi_0}{2}$, и, поскольку всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с плоской задачей, примем более привычные в этом случае обозначения декартовых координат x, y, вместо обозначений цилиндрической системы координат z, r, в которой было удобно формулировать задачу. Далее, обозначим величину $\frac{4\mu_m^2-1}{4k_0^2}$, входящую в выражение показателя преломления (1) и принимающую различные значения для различных нормальных волн, через K^2, опустив индекс m, чтобы получить результаты в общем для различных нормальных волн виде. При этом выявляются два существенно различных показателя преломления: для нормальной волны нулевого порядка ($\mu_0=0$), которая может возбуждаться в случае акустически жестких границ клина

$$n=\sqrt{1+\frac{k^2}{y^2}}, \tag{2}$$

где $k=\frac{\sqrt{4\mu^2-1}}{2k_0}$, и нормальных волн всех других порядков.

$$n=\sqrt{1-\frac{k^2}{y^2}}. \tag{3}$$

Им соответствуют два существенно различных характера распространения волн, что обнаруживается сразу при лучевом рассмотрении. Поскольку рефракция волн происходит в сторону возрастания показателя преломления, очевидно, что нормальная волна нулевого порядка будет рефрагировать в сторону ребра клина, а все другие нормальные волны — в противоположную сторону. Кроме того, на линии $y=k$, где выражение (3) обращается в нуль, должно происходить полное отражение волны, бегущей в направлении, перпендикулярном ребру клина, и, следовательно, полоса, ограниченная линиями $y=0$; $y=k$, представляет собой зону тени в смысле геометрической оптики. Это значит, что линия $y=k$ есть место критической для данной нормальной волны «толщины» клина. Выражение (2) нигде не обращается в нуль, и, следовательно, в приближении геометрической оптики, нормальная волна нулевого порядка нигде не испытывает полного отражения. Каждый из этих случаев требует специального рассмотрения. Здесь мы ограничимся рассмотрением рефракции нормальных волн не нулевого порядка. Для описания рефракции нормальных волн естественно прибегнуть к методу геометрической оптики, приняв в качестве отправного пункта уравнение эйконала, которое в данном случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=k_0^2\left(1-\frac{k^2}{y^2}\right). \tag{4}$$

Методом разделения переменных, положив $\eta(x, y) = \eta_1(x) + \eta_2(y)$, получаем решение

$$\eta = k_0 \left[\gamma x \pm \sqrt{(1-\gamma^2) y^2 - k^2} \mp k \arccos \left| \frac{k}{\sqrt{1-\gamma^2}\, y} \right| + c_1. \qquad (5)$$

Величины γ и c_1 являются константами разделения и интегрирования соответственно. Если через ϑ_0 обозначить угол между направлением касательной к лучу в точке наблюдения и направлением оси абсцисс, получается соотношение Снеллиуса $\gamma = n(y) \cos \vartheta_0$. Выражение $\eta(x, y)$

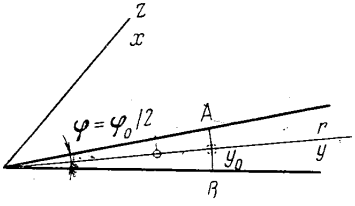

Рис. 1

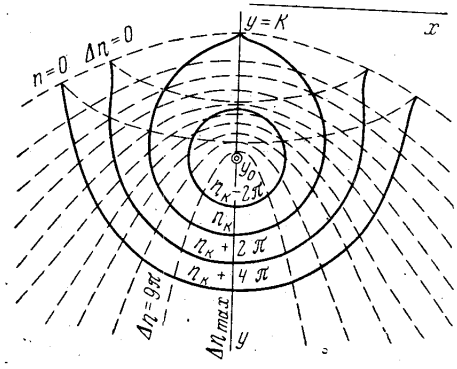

Рис. 2

дает величину набега фазы вдоль луча, а уравнение $\eta(x, y) = \text{const}$ представляет линию фронта «плоской» волны, набегающей из бесконечности, где $n=1$, под углом $\vartheta_0 = \arccos \gamma$ к направлению оси абсцисс. Двойной знак перед радикалом в выражении (5) означает наложение прямой и отраженной волны. Отражение происходит на линии $(1-\gamma^2) y^2 - k^2 = 0$, или $y = \frac{k}{\sin \vartheta_0}$, являющейся линией точек поворота лучей плоской волны и вместе с тем каустикой. Уравнение лучей как линий, ортогональных к волновому фронту, путем известных операций получается из (5):

$$\pm \frac{\gamma}{1-\gamma^2} \sqrt{(1-\gamma^2) y^2 - k^2} - x = c_2.$$

Константа c_2 играет роль параметра семейства лучей в плоской волне, с углом падения, определяемым γ. Лучи имеют вид гипербол, как это легко видеть, представив уравнение в другой форме

$$(x - c_2)^2 - \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} [(1-\gamma^2) y^2 - k^2] = 0. \qquad (6)$$

Заметим, что выражение (5) совпадает с выражением аргумента функций Ганкеля $H_\mu^{(1)}(k_0 y_0 \cos \vartheta_0)$, $H_\mu^{(2)}(k_0 y_0 \cos \vartheta_0)$, записанным в приближении ВКБ, и это соответствует известному факту, что строгое решение волнового уравнения в данном случае (3) выражается через эти функции. Лучевую картину для точечного источника можно сконструировать из выражения (6), определив константу C_2 из условия, что при любом γ луч проходит через точку источника $x=0$; $y=y_0$. Получается уравнение для однопараметрического семейства лучей, исходящих из точки $x=0$; $y=y_0$ под углом ϑ_0 к направлению оси абсцисс и представляющих собой ветви гипербол

$$F(x, y, \vartheta_0) = \left[x - y_0 \frac{(y_0^2 - k^2)\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}{y_0^2\sin^2\vartheta_0 + k^2\cos^2\vartheta_0}\right]^2 -$$

$$- y^2 \frac{(y_0^2 - k^2)\cos^2\vartheta_0}{y_0^2\sin^2\vartheta_0 + k^2\cos^2\vartheta_0} + \frac{y_0^2 k^2 (y_0^2 - k^2)\cos^2\vartheta_0}{y_0^2\sin^2\vartheta_0 + k^2\cos^2\vartheta_0} = 0. \qquad (7)$$

Точки поворота лучей (вершины гипербол) лежат на замкнутой кривой $(y^2 - k^2)(y^2 - y_0^2) + k^2x^2 = 0$ и не представляют теперь место отражения волны. Линией, представляющей собой границу тени и место отражения,

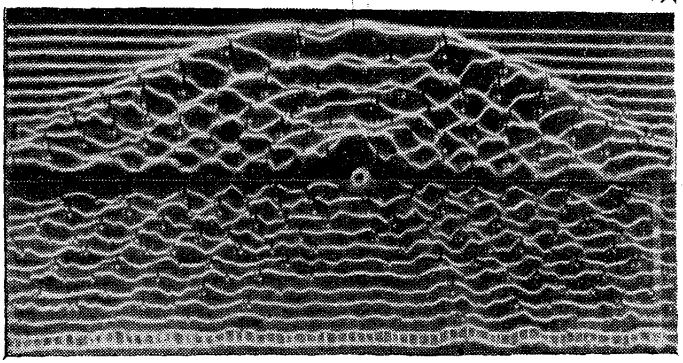

Рис. 3

является каустика $(y^2 - k^2)(y_0^2 - k^2) - k^2x^2 = 0$, которая определяется из условий $F(x, y, \vartheta_0) = 0$; $\frac{\partial F(x, y, \vartheta_0)}{\partial \vartheta_0} = 0$, как огибающая семейства лучей $F(x, y, \vartheta_0) = 0$. Это — ветвь гиперболы с фокусом в точке источника $y = y_0$; $x = 0$ и вершиной в точке $y = k$; $x = 0$. Таким образом, границы локализации нормальных волн различных порядков представляются семейством софокусных гипербол, асимптоты которых определяют углы характеристик направленности нормальных волн в клине. По мере увеличения порядка нормальной волны, т. е. с ростом k, эти гиперболы стягиваются и предельная гипербола, для которой $k = y_0$ вырождается в луч $y \geqslant y_0$; $x = 0$, что соответствует случаю расположения излучателя на линии $y = k$, где показатель преломления обращается в нуль, т. е. в месте критической для данной нормальной волны «толщины» клина. Само собой разумеется, что этот предельный случай выходит за границы критериев применимости метода геометрической оптики. Рефракция нормальной волны в клине от точечного источника нагляднее всего иллюстрируется последовательностью волновых фронтов, взятых через определенные интервалы набега фазы. Уравнение волновых фронтов находим как уравнение линий, ортогональных лучам (7), исходя из дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{F_y(x, y, \vartheta_0)}{F_x(x, y, \vartheta_0)}$, где $\vartheta_0 = f(x, y)$ определяется из (7). В результате громоздких выкладок, которые мы опускаем, получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yx}{y^2 - k^2 \mp \sqrt{(y^2 - k^2)(y_0^2 - k^2) - k^2x^2}}. \qquad (8)$$

Замена переменных $x=y_0\cos u\,\mathrm{sh}\,v$; $y=y_0\sin u\,\mathrm{ch}\,v$ приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, решением которого будет

$$\eta_{\mp}=k_0k\left\{\frac{\sqrt{y_0^2\,\mathrm{ch}^2 v-k^2}}{k}\mp\frac{\sqrt{y_0^2\sin^2 u-k^2}}{k}-\left[\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{y_0^2\,\mathrm{ch}^2 v-k^2}}{k}\mp\right.\right.$$

$$\left.\left.\mp\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{y_0^2\sin^2 u-k^2}}{k}\right]\right\}. \qquad (9)$$

Замена переменных (8), означающая переход от декартовой к эллиптической системе координат (u, v), подсказывается конфигурацией области локализации поля нормальной волны. Каустика в новой системе координат является координатной линией $u=\arcsin\frac{k}{y_0}$. Это обстоятельство, а также ряд других, обсуждение которых выходит за пределы настоящей темы, выражает тот факт, что выбранная таким образом эллиптическая система координат является наиболее естественной для исследования поля «точечного» источника в плоскослоистой среде вида (3). Верхний знак в выражении (9) берется для прямой волны, нижний — для волны отраженной. Смена знака происходит на каустике, что и дает основание говорить о ней, как о месте, где происходит отражение волны. Деформация волнового фронта по мере распространения, его разрыв, появление и распространение фронта отраженной волны иллюстрируется на рис. 2, где приведена теоретическая последовательность волновых фронтов, взятых с интервалом в одну длину волны, а также на рис. 3, где представлен результат эксперимента [3] в виде растровой осциллограммы с изображением амплитудного рельефа поля и волновых фронтов. Линии волновых фронтов на осциллограмме изображены короткими штрихами, а на рис. 4, скалькированном с рис. 3, сплошными линиями.

Наложением прямой и отраженной волны обусловлен интерференционный характер суммарного поля. Интерференционные линии, как линии постоянной разности хода прямой и отраженной волны, определяются из условия $\Delta\eta=\eta_+-\eta_-=\mathrm{const}$, т. е. $\frac{\sqrt{y_0^2\sin^2 u-k^2}}{k}-$ $-\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{y_0^2\sin^2 u-k^2}}{k}=\mathrm{const}$, или $u=\mathrm{const}$, т. е. являются координатными линиями. Это софокусные гиперболы. В декартовой системе координат, если в качестве параметра взять координату вершин гипербол $y_{\text{пар}}$, уравнение интерференциальных линий примет вид: $(y^2-y_{\text{пар}}^2)(y_0^2-k^2)-$ $-\,k^2x^2=0$. Параметр $y_{\text{пар}}$ изменяется от величины k, которой соответствует интерференционная линия с нулевой разностью хода, т. е. каустика, до величины y_0, соответствующей линии максимальной разности хода $\Delta\eta_{max}=2k_0k\left[\frac{\sqrt{y_0^2-k^2}}{k}-\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{y_0^2-k^2}}{k}\right]$, которую представляет луч $x=0$; $y\geqslant y_0$. Разности хода, кратные величине π, $\Delta\eta=n\pi$, $n=0, 1, 2, 3,\ldots$, соответствуют линиям интерференционных максимумов и минимумов, непосредственно наблюдаемых на экспериментальных записях, представленных на рис. 3. Четным n соответствуют максимумы, нечетным — минимумы. В соответствии с этим каустика, для которой $n=0$, представляет линию крайнего максимума. (В действительности же каустика

не совпадает с линией крайнего максимума, а лежит на его внешнем склоне.) Теоретические интерференционные линии показаны на рис. 2.

Расчет распределения интенсивности поля в приближении геометрической оптики, исходящей из положения, что распространение энергии происходит только вдоль лучей, сводится к расчету расхождения лучевой трубки, которое выражается через дифференциальный параметр

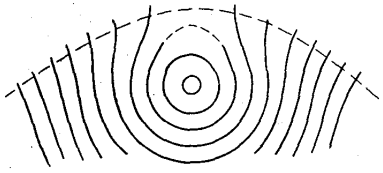

Рис. 4

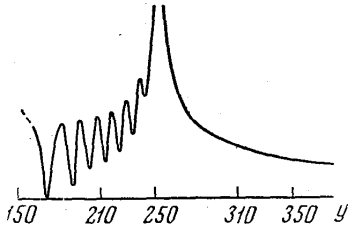

Рис. 5

1-го порядка системы криволинейных ортогональных координат $\vartheta_0 = f(x, y)$; $\eta = f_1(x, y)$; $h_{\vartheta_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$. Для прямой волны

$$h_{\vartheta_{0-}} = \frac{y_0 \sqrt{y^2 - k^2}}{\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}\sqrt{y^2 + y_0^2 + x^2 - 2k^2 - 2\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}}},$$

для отраженной

$$h_{\vartheta_{0+}} = \frac{y_0 \sqrt{y^2 - k^2}}{\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}\sqrt{y^2 + y_0^2 + x^2 - 2k^2 + 2\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}}},$$

так что поле нормальной волны в клине ψ, возбуждаемой сосредоточенным источником, записанное в виде суммы прямой волны $y^{-1/2}W_-$ и волны отраженной $y^{-1/2}W_+$, с точностью до постоянного множителя N, характеризующего интенсивность возбуждения в соответствии с (1′), выражается формулой

$$\psi = y^{-1/2}(W_- + W_+) = Ny^{-1/2}\left(\sqrt{\frac{h_{\vartheta_{0-}}}{n}}\, e^{-i\eta_-} + \sqrt{\frac{h_{\vartheta_{0+}}}{n}}\, e^{-i\eta_+}\right)\Phi(\varphi),$$

где η_- и η_+ даются формулой (9). В декартовой системе

$$\eta_\pm = k_0\left\{\sqrt{y^2 + y_0^2 + x^2 - 2k^2 \mp 2\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}} - \right.$$
$$\left. - k \operatorname{arctg} \frac{k\sqrt{y^2 + y_0^2 + x^2 - 2k^2 \mp 2\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}}}{k^2 \pm \sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}}\right\}.$$

Распределение амплитуды звукового давления суммарного поля получается в виде

$$\psi_0 = N_0 \sqrt[4]{\frac{1}{[(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2]\sqrt{(y^2 - y_0^2) + x^2(x^2 + 2y^2 + 2y_0^2)}}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{\left\{\begin{array}{l}\sqrt{y^2 + y_0^2 + x^2 - 2k^2 + 2\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}} + \\ + \sqrt{y^2 + y_0^2 + x^2 - 2k^2 - 2\sqrt{(y_0^2 - k^2)(y^2 - k^2) - k^2x^2}}\end{array}\right\}}{\sqrt[4]{(y^2 - y_0^2)^2 + x^2(x^2 + 2y^2 + 2y_0^2)}}} + 2\cos\Delta\eta,$$

где $\Delta\eta=\eta_+-\eta_-$. На рис. 5 приведен теоретический график распределения амплитуды колебания звукового давления на линии $x=0$, проходящей через источник. Формулы в приближении геометрической оптики не применимы на каустике, где они дают бесконечно большое значение амплитуды.

Уточненное выражение поля, применимое также на каустике и в зоне тени, для нормальной волны порядка m в эллиптической системе координат имеет вид

$$\psi=N_0H_\mu^{(1)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)\left[\sqrt{\frac{H_\mu^{(1)}(k_0y_0\sin u)\,H_\mu^{(2)}(k_0y_0\sin u)\,H_\mu^{(1)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)\,H_\mu^{(2)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)}{H_\mu^{(1)}(k_0y_0\sin u)\,H_\mu^{(2)}(k_0y_0\sin u)-H_\mu^{(1)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)H_\mu^{(2)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)}}\times\right.$$
$$\times H_\mu^{(2)}(k_0y_0\sin u)+$$
$$\left.+\sqrt{\frac{H_\mu^{(1)}(k_0y_0\sin u)H_\mu^{(2)}(k_0y_0\sin u)\,H_\mu^{(1)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)\,H_\mu^{(2)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)}{H_\mu^{(1)}(k_0y_0\sin u)\,H_\mu^{(2)}(k_0y_0\sin u)+H_\mu^{(1)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)\,H_\mu^{(2)}(k_0y_0\operatorname{ch}v)}}H_\mu^{(1)}(k_0y_0\sin u)\right]\Phi(\varphi),$$

где $H_\mu^{(1)}$ и $H_\mu^{(2)}$ — функции Ханкеля, $\mu=m\pi/\varphi_0$.

Решая аналогичную задачу для электромагнитных волн, мы придем к таким же результатам для «электрического» вектор-потенциала A_x^e, удовлетворяющего условию $A_r^e=A_z^e=0$ на гранях клина $\varphi=0$; $\varphi=\varphi_0$, и для «магнитного» вектор-потенциала A_x^m, удовлетворяющего условию $\frac{\partial A_r^m}{\partial\varphi}=\frac{\partial A_z^m}{\partial\varphi}=0$ на $\varphi=0$; $\varphi=\varphi_0$. В первом случае имеем $E_y=E_\varphi=0$; $E_x=ik_0A_x^e\neq0$; $H=\frac{1}{ik_0}\operatorname{rot}\bar{E}$; во втором $H_y=H_\varphi=0$; $H_x=ik_0A_x^m\neq0$, $E=-\frac{1}{ik_0}\operatorname{rot}\bar{H}$. Последний случай аналогичен акустическому случаю жестких границ, когда в спектре нормальных волн содержится волна нулевого порядка. Особый характер поведения этой волны требует, как об этом упоминалось выше, специального рассмотрения, что будет сделано в другой заметке.

Все приведенные здесь результаты в равной мере применимы для описания полей нормальных волн в клине и соответствующих им волновых полей в слоистонеоднородных средах вида (3). Кроме того, и эти результаты и метод решения полностью переносятся на задачу об излучении тонких колец. В самом деле, нетрудно убедиться, что задача об излучении кольца с синусоидальным распределением колебаний $\cos\mu\varphi$, $\mu=0, 1, 2, 3, \ldots$ есть частный случай рассмотренной нами задачи, когда угол $\varphi_0=2\pi$, так что дуга Ay_0B (отрезок кольца) становится окружностью (замкнутым кольцом). При этом для того, чтобы удовлетворялись требования непрерывности в плоскости совмещения граней клина ($\varphi=2\pi$, $\varphi=0$), надо взять целочисленные значения $\mu=m\frac{\pi}{\varphi_0}=\frac{m}{2}=1, 2, 3, \ldots$, т. е. четные $m=2, 4, 6, \ldots$.

Решения с нечетными m относятся к задаче об излучении кольца, пересекающего полуплоскость $\varphi=0$. Нормальной волне нулевого порядка в клине соответствует поле синфазно колеблющегося кольца.

В заключение необходимо отметить, что в последнее время в гидроакустике начинают появляться работы по распространению волн в волноводных слоях переменной толщины, в которых используется метод, предложенный ранее автором этой статьи для решения задачи распространения акустических волн в жидком клине и вообще в слое воды переменной глубины [2], [4]. В этой связи следует указать на ра-

боту [5], в которой аналогичным методом рассматривается также и задача распространения нормальных волн в волноводном слое с медленно изменяющимися вдоль слоя волновыми параметрами среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1965.
2. Кузнецов В. К. «Акуст. журн.», **5**, вып. 2, 170—175, 1959.
3. Кузнецов В. К. «Акуст. журн.», **13**, вып. 2, 1967.
4. Кузнецов В. К. Фокусировка нормальных волн в слое переменной толщины. Рефераты докладов на IV Всесоюзной акустической конференции, 1958, стр. 17.
5. Pierce A. D. J. Acoust. Soc. Amer., **37**, 19—27, 37, 1965.

Поступила в редакцию
28. 2 1966 г.

Кафедра
акустики