

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4 — 1967

УДК 538.56

Е. З. ЗЕМЛЯЧЕВ, Н. К. МАНЕШИН, В. Н. ПАРЫГИН

УМНОЖЕНИЕ ЧАСТОТЫ НА НЕЛИНЕЙНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ КОНТУРОМ

Максимально достижимая эффективность преобразования η_n при умножении частоты в n раз на экспоненциальном сопротивлении с дополнительным контуром на k -тую гармонику всегда меньше, чем при отсутствии последнего. Влияние дополнительного контура получается наименьшим, когда сопротивление его или очень мало, или очень велико. Если $k < n$, то при определенном сопротивлении дополнительного контура эффективность η_n равна нулю при любой величине нагрузки R_n . При $k > n$ уменьшение эффективности η за счет дополнительного контура менее значительное, чем в случае $k < n$. Основные выводы теоретического анализа согласуются с результатами экспериментального исследования умножителя частоты.

Для повышения эффективности преобразования при умножении частоты на нелинейной емкости в схему умножителя включают контура, настроенные на промежуточные гармоники. За счет смещения входного сигнала с промежуточными гармониками, а также за счет взаимодействия самих промежуточных гармоник мощность на выходной частоте может значительно возрасти [1—3].

Интересно выяснить, как сказываются дополнительные контура при умножении частоты на активном сопротивлении. О влиянии дополнительных цепей на к. п. д. умножения в какой-то мере можно судить на основании результатов [4]. Как следует из [4], мощность P_1 , потребляемая от источника входной частоты, не меньше величины $\sum_{k>1}^{\infty} k^2 P_k$,

где P_k — мощность k -той гармоники. Поэтому к. п. д. умножения в n раз не превышает $\frac{1}{n^2 + \frac{4P_2}{P_n} + \frac{9P_3}{P_n} + \dots}$. При отсутствии дополнительных

контуров мощности P_2, P_3 и т. д. обращаются в нуль. При этом повышается допустимый предел для к. п. д. Но сказать, как меняется эффективность умножения на основании результатов [4], нельзя.

В настоящей работе проводится анализ влияния дополнительных контуров на коэффициент преобразования умножителя частоты на нелинейном сопротивлении. С этой целью рассматривается задача об умножении частоты в 3 и 2 раза на сопротивлении с экспоненциальной характеристикой при включении в цепь умножителя дополнительного контура соответственно на вторую и третью гармоники.

Выбор сопротивления с экспоненциальной вольтамперной характеристикой обусловлен, во-первых, тем, что такой характеристикой обладают полупроводниковые диоды, во-вторых, тем, что полученные результаты можно распространить на элементы с идеальной (скачкообразной) нелинейностью.

Анализ проводится в предположении, что источник входного сигнала — генератор с нулевым внутренним сопротивлением, напряжения гармоник выделяются идеальными фильтрами, имеющими активное сопротивление, отличное от нуля, лишь на частоте определенной гармоники, а мощность постоянного тока рассеивается только на сопротивлении R_0 . При этих предположениях на диоде действует напряжение

$$v(\tau) = v_1 \cos \tau - v_2 \cos 2\tau - v_3 \cos 3\tau - v_0 \equiv \\ \equiv v_1 (\cos \tau - \lambda_2 \cos 2\tau - \lambda_3 \cos 3\tau) - v_0.$$

Ток через диод можно представить так: $I = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos k\tau$,

где

$$I_0 \equiv -\frac{i_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha v(\tau)} d\tau, \quad (1)$$

$$I_k \equiv \frac{i_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha v(\tau)} \cos k\tau d\tau. \quad (2)$$

При больших величинах входного напряжения, когда $\alpha v_1 \gg 1$, интегралы (1), (2) могут быть вычислены асимптотическим методом Лапласа

$$I_0 \cong \frac{i_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\alpha[v_1 f(\tau_0) - v_0]}}{\sqrt{-\alpha v_1 f''(\tau_0)}}, \quad (3)$$

$$I_k \cong i_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\alpha[v_1 f(\tau_0) - v_0]}}{\sqrt{-\alpha v_1 f''(\tau_0)}} \cos k\tau_0, \quad (4)$$

где τ_0 — значение аргумента, при котором функция $f(\tau) \equiv \cos \tau - \lambda_2 \cos 2\tau - \lambda_3 \cos 3\tau$ достигает максимума.

Тогда для коэффициента преобразования по мощности при умножении частоты в три раза получается выражение

$$\eta_3 = \lambda_3 \frac{\cos 3\tau_0}{\cos \tau_0}. \quad (5)$$

Определим, как связана эффективность η_3 с величиной нагрузки $r_3 \equiv \frac{2R_3}{R_0}$. Эта зависимость может быть получена с помощью очевидных соотношений

$$I_0 R_0 = v_0, \quad I_2 R_2 = v_2, \quad I_3 R_3 = v_3 \quad (6)$$

и асимптотического условия

$$\cos \tau_0 - \lambda_2 \cos 2\tau_0 - \lambda_3 \cos 3\tau_0 - \frac{v_0}{v_1} = 0, \quad (7)$$

вытекающего из естественного требования ограниченности гармоник тока при больших входных напряжениях [5]. При малых амплитудах гармоник, когда $4\lambda_2 + 9\lambda_3 < 1$, функция $f(\tau)$ достигает максимального значения при $\tau_0 = 0$. В этом случае из (5—7) получается зависимость

$$\eta_3 = \frac{r_3}{1 + r_2 + r_3}, \quad (8)$$

которая остается справедливой, пока сопротивление нагрузки не превышает величины

$$r_{3 \text{ гран}} = \frac{1 - 3r_2}{8}. \quad (9)$$

Когда сопротивление нагрузки становится больше $r_{3 \text{ гран}}$, то функция $f(\tau)$ достигает максимума уже при τ_0 , отличном от нуля и определяемом из

$$12\lambda_3 \cos^2 \tau_0 + 4\lambda_2 \cos \tau_0 - (1 + 3\lambda_3) = 0. \quad (10)$$

При этом меняется форма тока, протекающего через диод: вместо одиночного импульса в точке $\tau = 0$ имеем на интервале $(-\pi, \pi)$ два одинаковых симметрично расположенных относительно $\tau = 0$ импульса. Зависимость $\eta_3(r_3)$ в этом случае найти в явном виде уже не удается, но нетрудно на основании (5—7) и (10) построить график $\eta_3(r_3)$ (см. кривые 2 и 3 рис. 1, рассчитанные соответственно для $r_2 = \frac{1}{5}$ и $\frac{2}{5}$). С помощью (5—7) и (10) можно показать, что при сопротивлении $r_3 = \infty$ амплитуда выходной гармоники достигает максимального значения

$$\lambda_{3 \text{ макс}} = \frac{4 - 5r_2}{6(4 + 5r_2)}, \quad (11) \quad \tau_0 = 30^\circ. \quad (12)$$

Равенство (12) означает, что через диод протекают импульсы тока одной полярности, следующие друг за другом через половину периода третьей гармоники. Последним обстоятельством объясняется обращение в нуль эффективности умножения η_3 при r_3 , стремящемся к бесконечности.

При сопротивлении дополнительного контура $r_2 = \frac{4}{5}$, как видно из (11), преобразование в третью гармонику отсутствует при любой величине нагрузки r_3 . Когда сопротивление r_2 выбирается больше $\frac{4}{5}$, то значение τ_0 , определяемое из (10), превышает 30° . Напряжение третьей гармоники в этом случае находится уже в противофазе с основной, в результате чего у $f(\tau)$ при $\tau = 0$ может появиться максимум. Этот центральный максимум начинает влиять на величину гармоник тока лишь тогда, когда разница между ним и боковыми максимумами становится меньше некоторой малой величины δ , порядка $\frac{1}{\alpha \omega_1}$, т. е. при выполнении условия

$$f(\tau_0) = f(0) + \delta. \quad (13)$$

Из соотношений (7), (10) и (13) нетрудно получить уравнение

$$\frac{1 + 2 \cos \tau_{\text{нр}}}{r_2 \cos 2\tau_{\text{нр}}} = 1 + 2 \cos \tau_{\text{нр}} + 2 \cos^2 \tau_{\text{нр}}, \quad (14)$$

которое определяет то предельное значение $\tau_{пр}$, начиная с которого при вычислении эффективности необходимо учитывать наличие третьего импульса тока через диод.

Если $\tau_{пр}$, найденное из (14), меньше 30° , то вычисление η_3 проводится с учетом лишь двух боковых максимумов у функции $f(\tau)$, т. е. по формулам (5—7) и (10). Полагая в (14) $\tau_{пр} = 30^\circ$, находим сопротивление дополнительного контура $r_{2пр} = \frac{4(3\sqrt{3}-1)}{13}$, начиная с кото-

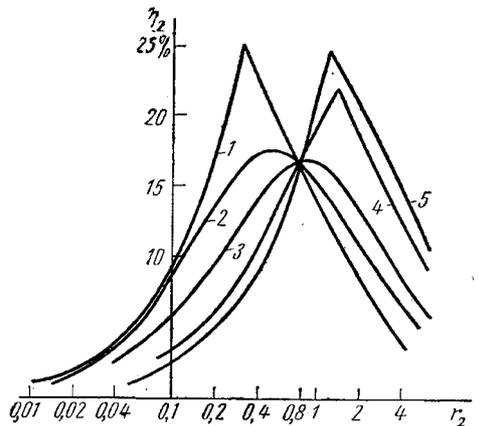
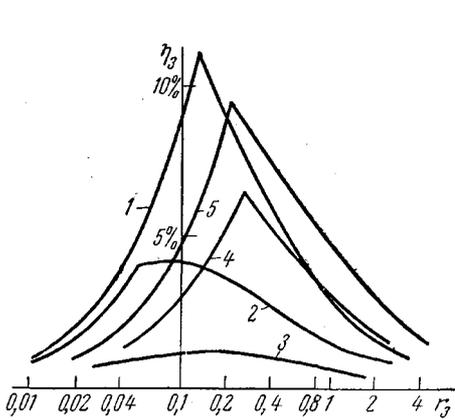


Рис. 1. Зависимость эффективности преобразования при утроении частоты от величины нагрузки при различных сопротивлениях r_2 : 1 — $r_2 = 0$, 2 — $r_2 = \frac{1}{5}$, 3 — $r_2 = \frac{2}{5}$, 4 — $r_2 = 5$, 5 — $r_2 = \infty$

Рис. 2. Зависимость эффективности преобразования при удвоении частоты от величины нагрузки при различных сопротивлениях r_3 : 1 — $r_3 = 0$, 2 — $r_3 = \frac{1}{12}$, 3 — $r_3 = \frac{1}{5}$, 4 — $r_3 = 1$, 5 — $r_3 = \infty$

рого расчет гармоник тока проводится с учетом всех трех максимумов функции $f(\tau)$.

При $r_2 > r_{2пр}$ асимптотический метод вместо (3), (4), (5) и (7) дает соответственно выражения

$$I_0 = \frac{1}{2} (1 + b) c, \quad I_k = (\cos k\tau + b) c, \quad \eta_3 = \lambda_3 \frac{b + \cos 3\tau_0}{b + \cos \tau_0}, \quad (15)$$

$$b + \cos \tau_0 - \lambda_2 (b + \cos 2\tau_0) - \lambda_3 (b + \cos 3\tau_0) - \frac{\lambda_2}{r_2} \frac{(1 + b)^2}{b + \cos 2\tau_0} = 0. \quad (16)$$

Здесь $b \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{f''(\tau_0)}{f''(0)}} e^{-\alpha v_1 \delta}$, $c \equiv 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} i_0 \frac{e^{\alpha v_1 f(\tau_0) - \alpha v_0}}{\sqrt{-\alpha v_1 f''(\tau_0)}}$. На рис. 1 показаны графики $\eta_3(r_2)$ (кривые 4 и 5), построенные с помощью (10), (13), (15) и (16) для значений $r_2 = 5$ и ∞ соответственно. С ростом сопротивления дополнительного контура r_2 (при $r_2 > \frac{4}{5}$) максимум эффективности η_3 монотонно возрастает, достигая наибольшего значения $\eta_{3макс} = \frac{1}{5 + 4\sqrt{2}} < \frac{1}{9}$ при $r_2 = \infty$. Сопротивление нагрузки r_3 при этом равно $\frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}$.

Итак, максимальная эффективность утроителя частоты с дополнительным контуром на вторую гармонику всегда меньше, чем при отсут-

ствии последнего. Увеличение сопротивления r_2 от нуля до $\frac{4}{5}$ приводит к монотонному снижению максимального значения эффективности преобразования от $\frac{1}{9}$ до нуля. При сопротивлении дополнительного контура $r_2 = \frac{4}{5}$ умножение в три раза отсутствует при любой величине нагрузки r_3 . Дальнейшее увеличение r_2 приводит к повышению максимального значения η_3 до величины $\frac{1}{5+4\sqrt{2}}$. Это дает возможность повысить η_3 за счет увеличения сопротивления дополнительного контура r_2 (при $r_2 > \frac{4}{5}$) при одновременном изменении оптимальной величины нагрузки.

Проведенный анализ позволяет в принципе проследить и за поведением коэффициента преобразования η_2 в зависимости от величины r_3 как параметра. Но в интересах ясности изложения вопрос о влиянии сопротивления r_3 на преобразование на вторую гармонику целесообразно рассмотреть отдельно с помощью анализа, аналогичного приведенному выше.

При малых сопротивлениях нагрузки, когда

$$r_2 < r_{2\text{гран}} = \frac{1-8r_3}{3}, \quad (17)$$

зависимость эффективности преобразования η_2 от r_2 получается аналогичной (8)

$$\eta_2 = \frac{r_3}{1+r_2+r_3}.$$

Когда сопротивление нагрузки становится больше $r_{2\text{гран}}$, то аналитического выражения зависимости $\eta_2(r_2)$ получить не удастся, но с помощью (6), (7), (10) и соотношения $\eta_2 = \lambda_2 \frac{\cos 2\tau_0}{\cos \tau_0}$ можно построить график $\eta_2(r_2)$ (см. кривые 2 и 3 рис. 2, рассчитанные соответственно для $r_3 = \frac{1}{12}$ и $\frac{1}{5}$).

При сопротивлении $r_3 > \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ в токе через диод появляется третий импульс при $\tau=0$. Эффективность $\eta_2(r_2)$ в этом случае вычисляется с помощью выражений, аналогичных (10), (13), (15) и (16). На рис. 2 рассматриваемому случаю соответствуют падающие участки кривых 4 и 5 (для $r_3=1$ и ∞ соответственно). При $r_3=\infty$ эффективность η_2 достигает наибольшего значения $\eta_{2\text{макс}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} < \frac{1}{4}$. Нетрудно показать, что все кривые $\eta_2(r_2)$ независимо от величины r_3 проходят через точку $\eta_2 = \frac{1}{6}$, $r_2 = \frac{4}{5}$.

Итак, максимальное значение коэффициента преобразования удвоителя частоты с дополнительным контуром на третью гармонику всегда меньше, чем при отсутствии последнего. При увеличении r_3 максимальное значение эффективности η_2 сначала падает от $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{6}$, а затем начинает возрастать до величины $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ при r_3 , равном бесконечности.

Проведенный анализ дает возможность оценить влияние дополнительного контура, настроенного на k -тую гармонику, на к.п.д. умножения частоты в n раз при произвольных значениях k и n . Если сравнивать максимально достижимые значения к.п.д. преобразования, то включение дополнительного контура в схему умножителя частоты на нелинейном сопротивлении с экспоненциальной или скачкообразной

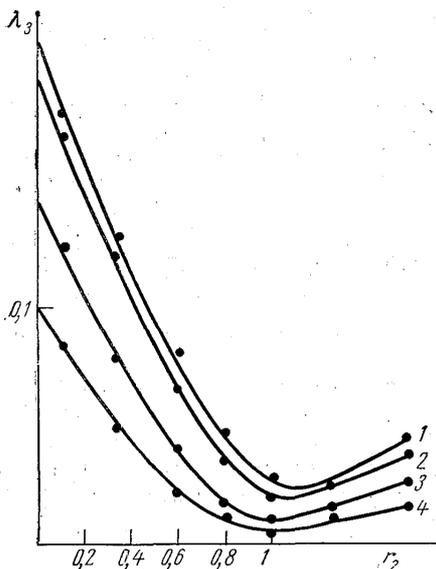


Рис. 3. Зависимость амплитуды третьей гармоники от величины сопротивления r_2 при различных сопротивлениях нагрузки r_3 : 1 — $r_3 = 1,75$, 2 — $r_3 = 0,75$, 3 — $r_3 = 0,5$, 4 — $r_3 = 0,24$

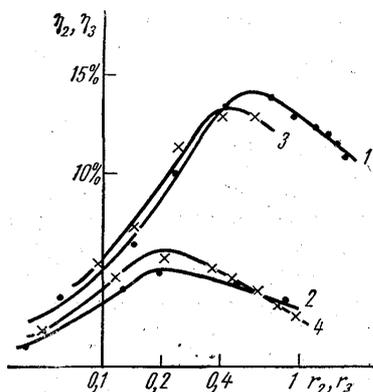


Рис. 4. Зависимость коэффициентов преобразования при удвоении и утроении частоты от величины нагрузки r_2 и r_3 : 1 и 2 — $R = 9,1 m$, 3 и 4 — $R = 39 m$

(идеальной) вольтамперной характеристикой всегда приводит к снижению к.п.д. преобразования. Уменьшение эффективности преобразования по сравнению со случаем отсутствия дополнительного контура зависит от сопротивления дополнительного контура и соотношения между k и n . Влияние дополнительного контура получается наименьшим, когда сопротивление его или очень мало, или очень велико. Если $k < n$, то при определенном сопротивлении r_k дополнительного контура эффективность умножения в n раз равна нулю независимо от величины нагрузки r_n . При $k > n$ эффективность η_n за счет дополнительного контура может снизиться от $\frac{1}{n^2}$ лишь до значения

$$\eta_{n_{\min}} = \frac{1}{n} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2k}}{\operatorname{tg} \frac{n\pi}{2k}} \quad (18)$$

Выражение (18) легко получить из (5) и (10), если учесть при этом, что $\tau_0 = \frac{\pi}{2k}$, а амплитуда k -той гармоники равна нулю. Из (18) видно, что с ростом k и n различие между случаем $k > n$ и $k < n$ уменьшается.

Влияние дополнительного контура на эффективность преобразования на нелинейном сопротивлении проверялось экспериментально.

С этой целью исследовался утроитель частоты с промежуточным контуром на вторую гармонику. Эксперимент проводился на частоте 200 кГц. На таких частотах контура имеют достаточно большие эквивалентные сопротивления, а точечный диод, который использовался в качестве экспоненциального сопротивления, ведет себя как идеальное сопротивление (диффузионная емкость еще не сказывается). На рис. 3 показано изменение напряжения третьей гармоники в зависимости от r_2 при различных сопротивлениях r_3 . (Сопротивления r_2 и r_3 варьировались путем изменения степени включения контуров в цепь умножителя.) Из рис. 3 видно, что при $r_2 \approx 1$ преобразование в три раза получается наихудшим. (Теоретически же при $r_2 = \frac{4}{5}$ напряжение третьей гармоники обращается в нуль.) Проследить за поведением γ_3 при больших величинах r_2 не удалось из-за сложности создания контуров с большими значениями r_2 и r_3 .

Экспериментально исследовался также вопрос о согласовании в умножителе. Из (9) и (17), полагая в (9) $r_2=0$, а в (17) $r_3=0$, следует, что максимальный коэффициент преобразования при удвоении частоты достигается при $r_2 = \frac{1}{3}$, а при утроении — при $r_3 = \frac{1}{8}$. На рис. 4 показаны экспериментально полученные зависимости η_2 от r_2 и η_3 от r_3 , снятые при двух значениях $R_0=9,1 \text{ Ком}$ и $R_0=39 \text{ Ком}$. Из рис. 4 видно, что максимум преобразования в удвоителе частоты достигается при $r_2 \approx 0,4$, а в утроителе — при $r_3 \approx 0,18$, что находится в достаточно хорошем соответствии с теоретическими результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Utsunomija T., Yuan S. PIRE, 50, No. 1, 57, 1962.
2. Penfield P., Rafuse R. P. Varactor applications M. I. T. Press, Cambridge, 1962.
3. Лившиц В. В., Рабинович-Визель А. А. «Радиотехника и электроника», 8, 12, 1963.
4. Page C. H. PIRE, 46, No. 10, 1738, 1958.
5. Пилягин В. В. «Радиотехника и электроника», 19, № 9, 47, 1964.

Поступила в редакцию
5. 3 1966 г.

Кафедра
физики колебаний