Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1967

УДК 62.505.5

И. В. НЕКРАСОВ, В. И. ШМАЛЬГАУЗЕН

СИНТЕЗ ОДНОЙ САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача об оптимальном слежении за случайным сигналом диффузионного типа со сносом. Предполагается наличие канала связи с шумами и одним неизвестным параметром. Показано, что может быть синтезирована система, близкая к оптимальной с использованием принципа самонастройки по неизвестному параметру. Приведен приближенный анализ и результаты электронного моделирования рассматриваемой системы.

Существующие методы расчета оптимальных систем [1] автоматического регулирования позволяют найти точное решение задачи лишь в отдельных случаях. Для более сложных задач найти точное решение обычно не удается. В ряде случаев целесообразно использовать известные способы оптимального управления более простыми системами, входящими в исследуемую как отдельные части, с целью построения системы, близкой к оптимальной.

В работе рассматривается следящая система такого типа, когда управляющее воздействие является функцией сигнала рассогласования между выходной координатой объекта $y(t)$ и входным сигналом $x(t)$. При этом, как часто бывает, например, в радиолокации, сигнал рассогласования $\varepsilon_0(t)$ поступает на вход блока управления через канал связи, где он смешивается с шумами и ослабляется в неизвестное число раз. Задающее воздействие $x(t)$ и сигнал рассогласования $\varepsilon_0(t) = x(t) - y(t)$ считаются недоступными наблюдению. Требуется, используя известный нам выход объекта управления, построить оптимальную в смысле минимума среднеквадратичного отклонения следящую систему.

Пусть объектом управления является интегратор с передаточной функцией $K(p) = \frac{1}{p}$. В качестве входного воздействия выберем винеровский флуктуационный процесс со сносом, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = a + \xi(t), \tag{1}$$

где a — константа, $\xi(t)$ — нормальный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции $K_{\xi\xi}(\tau) = B\delta(\tau)$; $x(t)$ является гауссовым процессом со стационарными приращениями и описывается

плотностью распределения вероятности:

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Bt}} \exp\left\{-\frac{(x-at)^2}{2Bt}\right\}.$$

Рассмотрим предварительно такую систему, у которой канал связи отсутствует. В этом случае оптимальная система может быть синтезирована аналитически [2]. Если на управляющие воздействия наложены ограничения $|u(\varepsilon_0)| \leqslant u_0$, то блок управления имеет релейную характеристику

$$u(\varepsilon_0) = \begin{cases} u_0 & \varepsilon_0 > 0 \\ -u_0 & \varepsilon_0 < 0 \end{cases}.$$

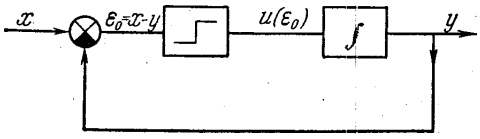

Рис. 1

Структурная схема такой системы приведена на рис. 1. Ее уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = a + \xi(t), \quad \dot{y} = u(\varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 = x - y.$$

Подставляя первые два уравнения в последнее, получим

$$\dot{\varepsilon}_0 = a - u(\varepsilon_0) + \xi(t), \tag{2}$$

$\varepsilon_0(t)$ является марковским процессом [3], плотность распределения вероятности которого описывается уравнением Фоккера—Планка:

$$\dot{w}(\varepsilon_0) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_0}[(a - u(\varepsilon_0))\, w] + \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_0^2}. \tag{3}$$

Здесь и далее мы будем искать только стационарные решения, пренебрегая переходными процессами. Стационарную плотность $w(\varepsilon_0)$ можно найти, решая уравнение (3) отдельно для областей $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_0 < 0$:

$$0 = -(a - u_0)\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_0} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_0^2}, \quad \varepsilon_0 > 0,$$

$$0 = -(a + u_0)\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_0} + \frac{1}{2} B \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_0^2}, \quad \varepsilon_0 < 0. \tag{4}$$

Сшивая решения (4) при $\varepsilon_0 = 0$ и нормируя, получим

$$w(\varepsilon_0) = \frac{u_0^2 - a^2}{Bu_0} \begin{cases} \exp\left[\dfrac{2(a-u_0)}{B}\varepsilon_0\right] & \varepsilon_0 > 0 \\ \exp\left[\dfrac{2(a+u_0)}{B}\varepsilon_0\right] & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Необходимым условием существования решения является неравенство $a < u_0$. Зная плотность распределения $w(\varepsilon_0)$, можно найти первые два момента: среднее значение ошибки слежения и ее дисперсию:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{B_a}{u_0^2 - a^2}, \qquad D\varepsilon_0 = \frac{B^2}{2}\,\frac{u_0^2 + a^2}{(u_0^2 - a^2)^2}. \tag{5}$$

Возвращаясь к исходной задаче, будем считать, что блок управления в синтезируемой системе также имеет релейную характеристику. Чтобы не допустить воздействия помех на релейный элемент, перед блоком управления поставим фильтр. Блок-схема системы вместе с

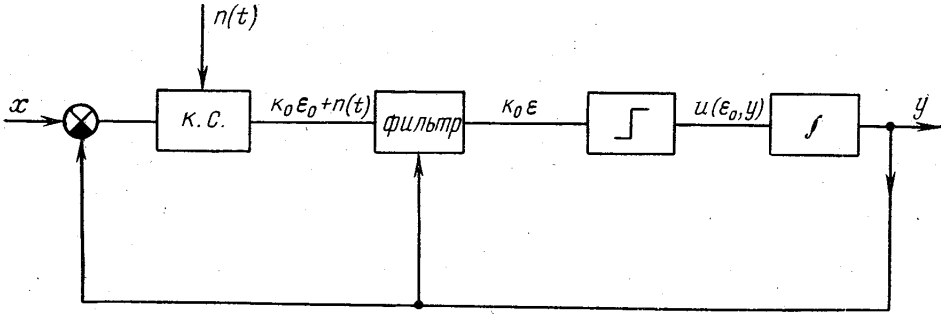

Рис. 2

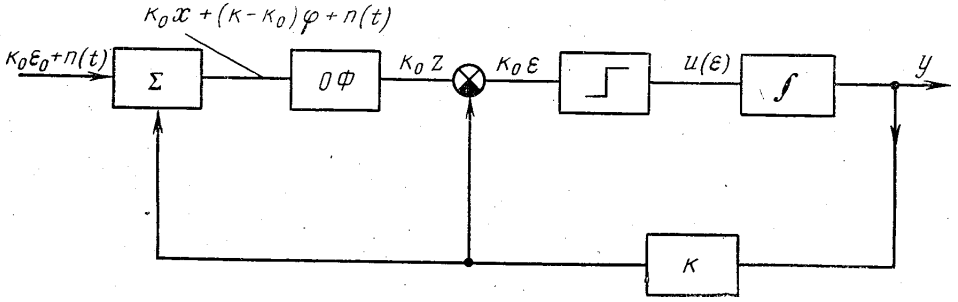

Рис. 3

каналом связи принимает вид, изображенный на рис. 2. Относительно свойств канала связи (КС) предположим, что на сигнал рассогласования ε_0 аддитивно накладывается белый шум $n(t)$ с нулевым средним значением интенсивности N. Коэффициент ослабления K_0 постоянен в течение каждой реализации входного воздействия, но может принимать различные значения в разных реализациях. Фильтр должен таким образом обрабатывать сигналы $K_0\varepsilon_0+n(t)$ и $y(t)$, чтобы восстановить сигнал ε_0; в том случае, когда $\varepsilon=\varepsilon_0$, в системе достигаются минимальные потенциально возможные ошибки (5). Однако аналитически структуру такого фильтра найти затруднительно. Если бы коэффициент ослабления K_0 был известен, то задачу фильтрации можно было бы решить следующим образом. Прибавляя к сигналу $K_0\varepsilon_0+n(t)$ сигнал K_0y, получим гауссовый процесс $x(t)$ на фоне шума. Тогда задача сводилась бы к оптимальной фильтрации сигнала $x(t)$ с известными статистическими свойствами на фоне белого шума. В отличие от сказанного (см. рис. 3) выходной сигнал $y(t)$ поступает в блок фильтрации с некоторым коэффициентом K, поскольку коэффициент K_0 неизвестен. Ниже будет показано, что система может быть сделана самонастраивающейся по параметру K, т. е. в процессе работы K стремится к K_0.

Считая пока, что $K=K_0$, рассмотрим задачу синтеза фильтра О. Ф. Эту задачу можно решить в рамках теории оптимальной линейной

фильтрации [4], но только для процесса $\hat{x}=x-at$. Для частотной характеристики фильтра имеем $K(\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}$, где $T=\sqrt{\frac{N}{B}}$. Оптимальный фильтр представляет собой апериодическое звено первого порядка с постоянной времени T. Таким образом, настроенную систему ($K=K_0$) можно представить состоящей из двух частей. Первая часть вырабатывает сигнал K_0z, такой, что функция $z(t)$ максимально близка к задающему воздействию $x(t)$ (в силу оптимальности фильтра). Вторая часть осуществляет оптимальное слежение за сигналом K_0z.

Для того чтобы найти характеристики сигнала ошибки ε, составим уравнения движения замкнутой системы. Как видно из рис. 2 и 3:

$$K_0\varepsilon(p)=K_0[x(p)-y(p)]K(p)+Ky(p)[k(p)-1]+n(p)K(p),$$

где $K(p)=\frac{1}{1+pT}$ — передаточная функция оптимального фильтра. Переходя к оригиналам, получим

$$T\dot{\varepsilon}+\varepsilon=x-y+\frac{k}{k_0}T\dot{y}+\frac{n(t)}{k_0}. \tag{6}$$

Уравнение (6) совместно с уравнениями

$$\dot{x}=a+\xi(t),\quad \dot{y}=u(\varepsilon) \tag{7}$$

полностью описывает поведение рассматриваемой системы. Однако найти точное решение для $w(\varepsilon)$ не удается. Переписывая уравнение (6)

$$T\left(\dot{\varepsilon}+\frac{k}{k_0}\dot{y}\right)+\varepsilon+\frac{k}{k_0}y=\frac{k-k_0}{k_0}y+x+\frac{n(t)}{k_0} \tag{8}$$

для настроенной системы, сумму $\varepsilon+y$ можно интерпретировать как выходной сигнал оптимального фильтра, на вход которого поступают сигнал $x(t)$ и помеха $n(t)$. Записывая уравнение (8) отдельно для помехи $n(t)$ и полезного сигнала $x(t)$ и обозначая сигналы на выходе фильтра ζ_1 и $x-aT+\zeta_2$, получим

$$T\dot{\zeta}_1+\zeta_1=n(t),\quad T\dot{\zeta}_2+\zeta_2=-T\zeta(t).$$

Случайные сигналы ζ_1 и ζ_2 являются экспоненциально коррелированными процессами с нулевыми средними значениями и дисперсиями $D\zeta_1=\frac{N}{2T}$, $D\zeta_2=\frac{BT}{2}$. Таким образом, мгновенная ошибка фильтрации будет $z-x=\zeta_1+\zeta_2-aT$. Ее средняя величина $-aT$, а дисперсия $-D\zeta_1+D\zeta_2=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{T}+BT\right)$. Эта величина имеет минимум, равный $\sqrt{NB}$, при $T=\sqrt{\frac{N}{B}}$, что, как и следовало ожидать, совпадает с полученным ранее выражением для постоянной времени фильтра T.

Можно оценить точность работы настроенной системы. Из уравнения (8) следует

$$\varepsilon+y=x-aT+\zeta_2+\frac{\zeta_1}{k_0}. \tag{9}$$

Дифференцируя (9) по времени и подставляя в него уравнения (7), получим

$$\dot{\varepsilon} = a - \frac{1}{T}\zeta - u(\varepsilon) + \frac{1}{k_0 T} n(t),$$

где $\zeta = \zeta_2 + \frac{\zeta_1}{k_0}$. Полученное уравнение отличается от уравнения (2) лишь членом $-\frac{1}{T}\zeta$. Тем не менее точно решить соответствующее ему уравнение Фоккера—Планка не удается. Укажем приближенный подход к решению этой задачи. Постоянная времени собственно следящей системы намного меньше (T) времени корреляции процесса $\zeta(t)$. Поэтому достаточно гладкие в указанном смысле процессы отслеживаются с малой ошибкой. Положим, что на некотором отрезке времени τ, большем времени корреляции сигнала ошибки ε и меньшем T, $\zeta(t)$ — линейно изменяющийся сигнал со средней скоростью $\frac{\zeta_\tau}{T}$, где ζ_τ — среднее значение сигнала $\zeta(t)$ за время τ. Воспользуемся выражениями (5) для определения величины среднего значения ошибки слежения и ее дисперсии, подставляя в них вместо a случайную скорость $a' = a - \frac{1}{T}\zeta_\tau$, а вместо B интенсивность шума $\frac{N}{k_0^2 T^2}$. Усредняя затем по времени τ, получим

$$\tilde{\bar{\varepsilon}} = \frac{N}{k_0^2 T^2}\left[\frac{a}{u_0^2 - a^2} + \frac{a(3u_0^2 + a^2)\overline{\zeta^2}}{(u_0^2 - a^2)^3 T^2}\right],$$

$$\tilde{D}\varepsilon = \frac{N^2}{2k_0^4 T^4}\left[\frac{u_0^2 + a^2}{(u_0^2 - a^2)^2} + \frac{3(u_0^4 - 6u_0^2 a^2 + a^4)\overline{\zeta^2}}{(u_0^2 - a^2)^4 T^2}\right]. \qquad (10)$$

При $a \ll u_0$ последние члены в обоих выражениях являются величинами второго порядка малости, если только $u_0^2 \gg 3k_0^3 B\sqrt{\frac{B}{N}}$, и их можно не учитывать. Полученные выражения определяют отклонение y от величины $z = x - aT + \zeta$. Тогда $\varepsilon_0 = x - y = \varepsilon + aT - \zeta$. Считая величины ε и ζ статистически не связанными, найдем среднее значение и дисперсию минимально возможной в данной системе ошибки:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \tilde{\bar{\varepsilon}} + aT, \quad D\varepsilon_0 = \tilde{D}\varepsilon + \overline{\zeta^2}. \qquad (11)$$

Отбрасывая в (10) члены второго порядка малости и подставляя в (10) и (11) значение $T = \sqrt{\frac{N}{k_0^2 B}}$, окончательно получаем

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{Ba}{u_0^2 - a^2} + a\sqrt{\frac{N}{k_0^2 B}},$$

$$D\varepsilon_0 = \frac{B(u_0^2 + a^2)}{2(u_0^2 - a^2)^2} + k_0\sqrt{BN}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что с указанной точностью ошибка отслеживания в рассматриваемой системе состоит из двух частей: ошибки отсле-

живания предварительно рассмотренной системы (5) и ошибки, обусловленной введением оптимального фильтра.

Рассмотрим задачу об автоматической настройке параметра k. Обычно применяемый способ настройки заключается в следующем: задавая приращения параметру, определяют зависимость критерия качества от этого приращения. Действуя таким образом, находят значение параметра, минимизирующее заданный критерий качества, при этом основное время система находится в области, отличной от минимума. В данном случае оказывается возможным осуществлять управление параметром k, не прибегая к пробным шагам по этому параметру. Из рис. 3 видно, что информация о рассогласовании $(k—k_0)$ явно входит в выражение

$$k_0 x + (k - k_0) y + n(t). \tag{13}$$

Однако всю сумму нельзя использовать в качестве сигнала рассогласования, поскольку x и y — нестационарные случайные процессы. Функцию, зависящую от $(k—k_0)$ и не зависящую от момента измерения, можно получить следующим образом.

Пусть

$$e(t) = x(t) - y(t) \tag{14}$$

отклонение сигнала на выходе системы от сигнала на входе. Ничего пока не говоря о природе функции $e(t)$ и требуя лишь ее стационарности, мы можем предположить возможность выделения $e(t)$ на фоне сигнала $x(t)$. Пусть имеется некоторый фильтр, выполняющий эту операцию. Подставляя (14) в (13) получим

$$k(x) - (k - k_0) e + n(t).$$

Выходной сигнал фильтра представим в виде

$$(k - k_0) e + \chi(t).$$

Умножая результат фильтрации на функцию $e(t)$, найденную аналогичным образом из выходного сигнала системы y, и усредняя произведение за время τ, получим управляющую функцию $u_{упр}$

$$u_{упр} = \frac{k - k_0}{\tau} \int_0^\tau e^2 dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e\chi dt. \tag{15}$$

Для некоррелированных случайных функций $e(t)$ и $\chi(t)$ второй интеграл в пределе при $\tau \to \infty$ обращается в нуль

$$u_{упр}^{\infty} = (k - k_0) \bar{e}^2. \tag{16}$$

Таким образом, можно считать

$$u_{упр} = (k - k_0) \bar{e}^2 + \Delta u,$$

где Δu — ошибки, связанные с конечностью времени усреднения.

Предполагая, что изменение параметра k производится в дискретные моменты времени, рассмотрим процесс настройки по следующему алгоритму:

$$k_{n+1} = k_n - \alpha u_{упр}. \tag{17}$$

Подставим для $\tau \to \infty$ выражение (16) в (17)

$$k_{n+1} = k_n - \alpha (k_n - k_0) \bar{e}^2. \tag{18}$$

В силу линейности этого уравнения можем, не теряя общности, положить $k_0=0$. Решение уравнения (18) будем искать в виде $k_n = ce^{\lambda n}$. Подставляя это выражение в (18) и разрешая его относительно λ, для k_n получим

$$k_n = ce^{n \ln (1-\alpha\overline{e^2})} = c(1-\alpha\overline{e^2})^n, \tag{19}$$

где c есть значение коэффициента k_n в начальный момент времени. Условием сходимости процесса настройки к точке нуль является неравенство $|1-\alpha\overline{e^2}|<1$.

Величину параметра α нужно выбирать таким образом, чтобы число шагов n_0, за которое координата k_n попадает в δ-окрестность точки 0, было минимальным. Подставляя в (19) $k_{n_0}=\delta$, получим

$$n_0 = \frac{\ln \frac{c}{\delta}}{|\ln|1-\alpha\overline{e^2}||}.$$

Очевидно при $\delta\neq 0$ минимальное значение $n_0=0$ достигается при $\alpha = \frac{1}{\overline{e^2}}$. Разумеется, что такого идеального случая в реальной системе быть не может, поскольку значение $u_{\text{упр}}$ содержит ошибки флуктуационного характера, возникающие из-за конечности времени усреднения.

Вернемся к уравнению (14). Кажется естественным в качестве функции $e(t)$ выбрать те отклонения y от x, которые присутствуют в каждой следящей системе, т. е. положить $e=\varepsilon_0$. Тогда $u^{\infty}_{\text{упр}} = (k-k_0)\,\overline{\varepsilon_0^2}$, однако на пути реализации такой идеи встает ряд трудностей. Сигналы x и ε_0 слабо коррелированы, причем порядок малости корреляционной функции совпадает с порядком $\overline{\varepsilon_0^2}$. Поэтому не представляется возможным создать простой и эффективный фильтр, выделяющий сигнал $\varepsilon_0(t)$ на фоне $x(t)$. Кроме того, $\overline{\varepsilon_0^2}$ зависит от $(k-k_0)^2$, что приводит к нелинейности уравнений настройки и затрудняет их анализ. Эти трудности можно обойти, вводя специальное пробное отклонение δy выходного сигнала системы. Теперь везде вместо y действует сигнал $y+\delta y$. Выбирая, например, $\delta y = m\sin\omega_0 t$ получим пробное отклонение, статистически не связанное с процессами $x(t)$ и $n(t)$. Фильтром, общие свойства которого были отмечены, может служить дифференцирующая RC-цепочка, причем $T_1=RC\gg\frac{1}{\omega_0}$. Такой фильтр обеспечивает стационарность выходных сигналов, так как он имеет нуль передаточной функции в начале координат, а входные сигналы имеют в начале координат полюс не выше первого порядка. Применение в дальнейшем операций умножения и интегрирования практически полностью исключает присутствие флуктуационного компонента в управляющем напряжении. Умножая результат фильтрации на $A\sin\omega_0 t$, получим на выходе усредняющего интегратора согласно (15):

$$u_{\text{упр}} = \frac{(k-k_0)\,Am}{2} + \Delta u,$$

где $\Delta u\to 0$ при $\tau\to\infty$. Приближенная оценка значения Δu для системы, близкой к настроенной, имеет вид

$$\Delta u = \frac{A}{\omega_0}\left(\frac{R_1}{\sqrt{\tau}} + \frac{R_2}{\tau}\right),$$

где

$$R_1 = \sqrt{2N\omega_0^2} + \sqrt{2B}, \text{ а } R_2 = \frac{m(k-k_0)}{2} + 2kaT.$$

Точность отслеживания системы может быть оценена как $\Delta k = \alpha \Delta u$. Так как $\alpha = \frac{1}{\bar{e}^2} = \frac{2}{Am}$, то получим

$$\Delta k = \frac{2\Delta u}{Am} = \frac{2}{m\omega_0}\left(\frac{R_1}{\sqrt{\tau}} + \frac{R_2}{\tau}\right). \qquad (20)$$

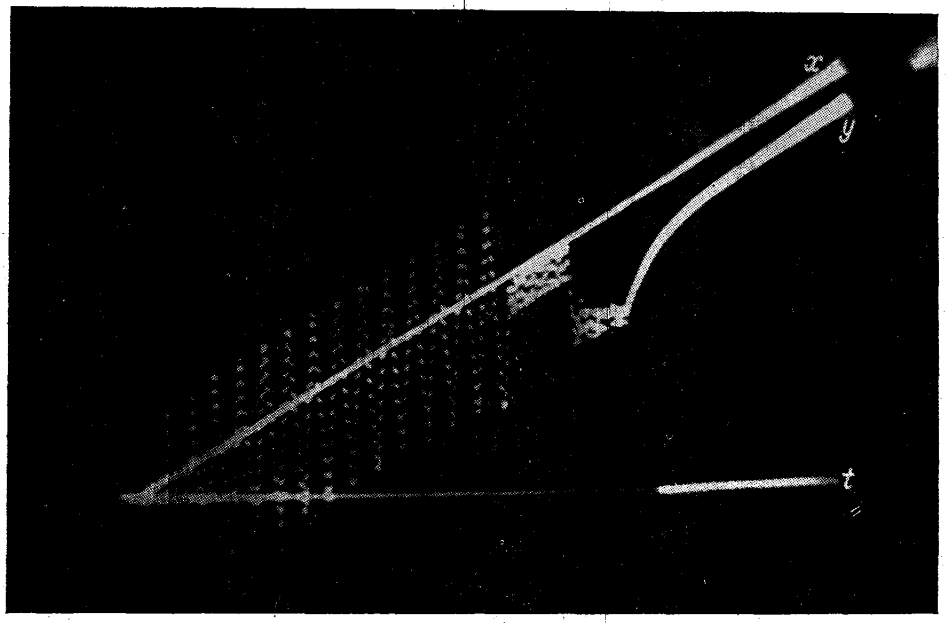

Рис. 4

Для проверки основных выводов теории была построена модель описанной выше системы на базе нелинейного аналогового устройства МН-7. В качестве переменного коэффициента использовался шаговый искатель. Специальная приставка к машине МН-7 осуществляла алгоритмы автоматического управления переменным коэффициентом. Основной целью эксперимента было качественное исследование работы модели при различных входных воздействиях.

В том случае, когда сигнал на входе системы линейно изменяется со временем $x=at$, заметна средняя ошибка слежения, причем величина $\bar{\varepsilon}_0$ пропорциональна a и k и исчезает при $a=0$. При $k=0$ система становится неустойчивой и слежение носит автоколебательный характер. С ростом k амплитуда автоколебаний убывает, и при $k>k_{кр}$ колебания затухают. На рис. 4 показана осциллограмма входного (x) и выходного (y) сигналов системы при изменении k шагами от нуля до некоторого k' больше критического.

Наблюдаемая неустойчивость подтверждает целесообразность введения второго кольца обратной связи ($k=0$ соответствует разрыву этого кольца). Наличие средней ошибки объясняется присутствием в системе фильтра, пропускающего линейно нарастающее напряжение со стационарной ошибкой aT. При этом величина $\bar{\varepsilon}_0$ не зависит от ампли-

туды управляющего воздействия u_0. При наличии помехи $n(t)$ в таком режиме возрастает средняя ошибка, что следует из формул (10), а также увеличивается значение $k_{кр}$.

Ошибка слежения носит флуктуационный характер, и ее дисперсия не равна нулю, как в том случае, когда шум отсутствует.

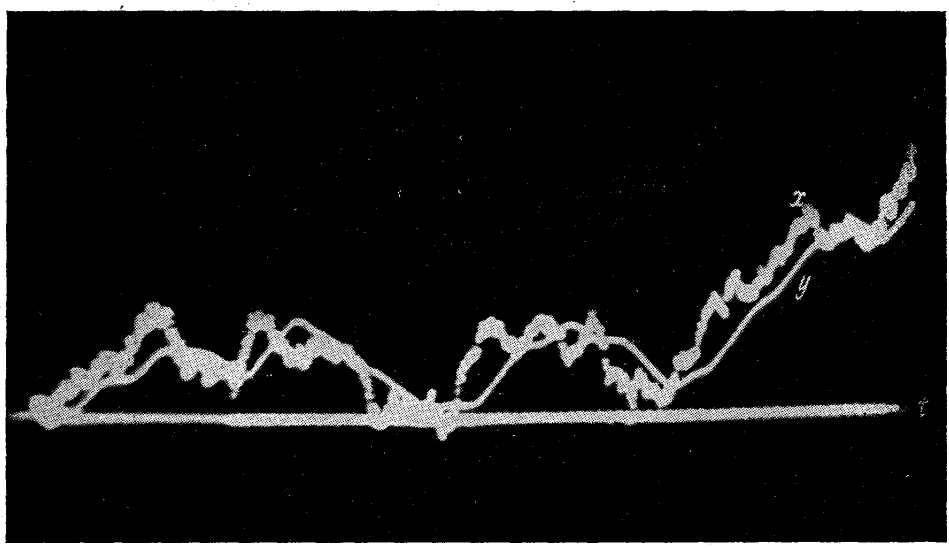

Рис. 5

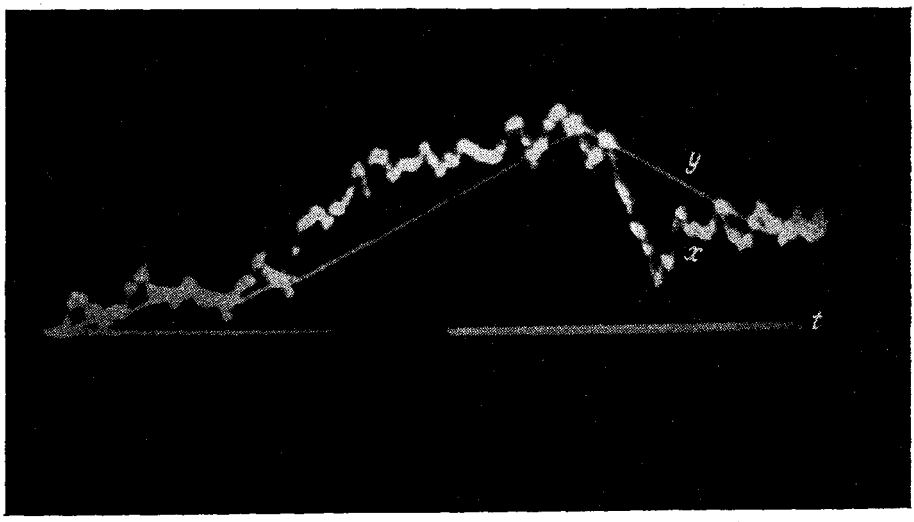

Рис. 6

В основном режиме задающее воздействие является винеровским процессом со сносом (1). Ошибка слежения даже при отсутствии шума носит флуктуационный характер (рис. 5). Ее среднее значение и дисперсия существенно зависят от величин a и u_0, как это следует из формул (12), причем, когда $u_0 < a$, следящая система перестает работать. На рис. 6 показана осциллограмма входного (x) и выходного (y)

сигналов системы при $k=k_0$. В присутствии помехи наличие фильтра приводит к сильному сглаживанию выходного сигнала $y(t)$, и с увеличением k процесс сглаживается еще больше.

Далее исследовалась система автоматической подстройки коэффициента k. Эксперимент показал, что получить информацию о расстройке $(k-k_0)$, пользуясь только естественными флуктуациями сигнала ошибки, практически невозможно. Поэтому были сделаны выводы о необходимости введения пробного сигнала

$$\delta y = m \sin \omega_0 t.$$

Процесс самонастройки соответствует приведенным выше уравнениям (19) и состоит из асимптотического или затухающего колебательного движений системы управления переменным коэффициентом. При этом величина ошибки отслеживания Δk совпадает по порядку с оценкой в (20).

Заложенный в основу описанной системы принцип позволяет проводить оптимизацию для частного случая известного параметра и затем строить параллельную следящую систему, обеспечивающую выполнение этого условия в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., Физматгиз, 1963.
2. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963.
3. Стратонович Р. Л., Шмальгаузен В. И. «Изв. АН СССР», энергетика и автоматика, № 5, 1962.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Советское радио», 1961.

Поступила в редакцию
28. 9 1965 г.

Кафедра
общей физики для мехмата