А. К. БАХТАДЗЕ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ЛИВНЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Описывается решение уравнений электромагнитной каскадной теории в приближении малых углов многократного рассеяния при произвольных граничных условиях. Сечения основных процессов тормозного излучения и образования пар были взяты в форме Бете—Гайтлера, а также с учетом поляризации среды. Рассмотрено решение для первичного электрона, справедливое для конечных значений отношения E/E_0 .

Уравнения электромагнитной каскадной теории в приближении малых углов многократного рассеяния без учета ионизационных потерь решались многими авторами [1—9]. Во всех перечисленных работах решение было получено только для некоторых частных видов граничных условий. В настоящей работе решаются уравнения при произвольном виде граничных условий и функций источников частиц. Используется более строгий математический аппарат. Полученное решение справедливо при любых однородных сечениях основных процессов тормозного излучения и образования пар, конкретизированных примером сечения Бете—Гайтлера и сечения с учетом поляризации среды, вычисленного Тер-Микаэляном [1, 10]. При получении решения для первичного электрона в данной работе учитываются члены ряда, пропорциональные $e^{\lambda_1(s+2)t}$, $e^{\lambda_1(s+4)t}$, ..., отброшенные при вычислениях в [6]. Это позволило уточнить выражение для угловой функции электронов, справедливое для конечных значений отношения E/E_0 . Исходные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial P(E, t, \theta)}{\partial t} = -A'P(E, t, \theta) + B'\Gamma(E, t, \theta) + \frac{E_k^2}{4E^2} \Delta_0 P(E, t, \theta) + S_P(E, t, \theta), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Gamma(E, t, \theta)}{\partial t} = C'P(E, t, \theta) - \sigma_0 \Gamma(E, t, \theta) + S_\Gamma(E, t, \theta),$$

где $\Delta_0 = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$, $P(E, t, \theta)$ — число электронов и позитронов, $\Gamma(E, t, \theta)$ — число фотонов с энергией E , на глубине t в каскадных единицах,двигающихся под углом θ относительно вертикали, $S_P(E, t, \theta)$ и

$S_{\Gamma}(E, t, \theta)$ — функции источников тех же частиц. $E = 21 \text{ Mev}$. Операторы A', B', C' для случая однородных сечений имеют вид

$$\begin{aligned}
 A'P(E, t, \theta) &= \int_0^1 \left[P(E, t, \theta) - \frac{1}{1-x} P\left(\frac{E}{1-x}, t, \theta\right) \right] \varphi_1(x) dx, \\
 B'\Gamma(E, t, \theta) &= 2 \int_0^1 \Gamma\left(\frac{E}{x}, t, \theta\right) \varphi_2(x) \frac{dx}{x}, \\
 C'P(E, t, \theta) &= \int_0^1 P\left(\frac{E}{x}, t, \theta\right) \varphi_1(x) \frac{dx}{x},
 \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — функции сечений, зависящих только от отношения энергий первичной и вторичной частиц.

Для сечения Бете—Гайтлера и сечения Тер-Микаэляна при условии полного экранирования

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= [1,36(1-x) + x^2] \frac{x}{x^2 + \omega^2}, \quad x = E'/E, \\
 \varphi_2(y) &= 1,36(y^2 - y) + 1, \quad y = E/E',
 \end{aligned} \quad (3)$$

где E и E' — энергии электрона и фотона соответственно. В случае сечения Бете—Гайтлера $\omega = 0$. В случае сечения Тер-Микаэляна для воздуха $\omega = 1,44 \cdot 10^{-6}$, для свинца $\omega = 1,19 \cdot 10^{-4}$.

Для решения уравнений (1) воспользуемся методом интегральных преобразований. Это позволит освободиться от производных и интегралов и свести уравнения (1) к системе уравнений в конечных разностях. После совершения интегрального преобразования будем обозначать трансформанту той же буквой, которой обозначена исходная функция, а изменять будем только обозначение переменной, по которой производится преобразование. Первообразными будут функции, содержащие переменные E, t, θ или же эти переменные со штрихами.

Функции с тем же обозначением, содержащие переменные s, λ, k или же эти переменные со штрихами являются образами, трансформантами. По переменной θ используем преобразование Бесселя, по E — преобразование Меллина, по t — преобразование Лапласа. Умножая уравнения (1) на $\theta J_0(k\theta) E^s e^{-\lambda t}$ и интегрируя по θ, E, t от нуля до бесконечности, получим

$$\begin{aligned}
 \lambda P(s, \lambda, k) &= -A(s)P(s, \lambda, k) + B(s)\Gamma(s, \lambda, k) - \\
 &- \left(\frac{kE_k}{2}\right)^2 P(s-2, \lambda, k) + P_s(k) + S_P(s, \lambda, k),
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\lambda \Gamma(s, \lambda, k) = C(s)P(s, \lambda, k) - \sigma_0 \Gamma(s, \lambda, k) + \Gamma_S(k) + S_{\Gamma}(s, \lambda, k),$$

где

$$P(s, \lambda, k) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\theta dE dt \theta J_0(k\theta) E^s e^{-\lambda t} P_+(E, t, \theta), \quad (5)$$

$$P_s(k) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\theta dE \theta J_0(k\theta) E^s P(E, t=0, \theta);$$

$$\Gamma_s(k) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\theta dE \theta J_0(k\theta) E^s \Gamma(E, t=0, \theta) \quad (6)$$

и аналогично для $S_{P,\Gamma}(s, \lambda, k)$. $J_0(x)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

$$A(s) = \int_0^1 [1 - (1-x)^s] \varphi_1(x) dx,$$

$$B(s) = 2 \int_0^1 x^s \varphi_2(x) dx, \quad (7)$$

$$C(s) = \int_0^1 x^s \varphi_1(x) dx.$$

Функции, определенные (7) для сечения Бете — Гайтлера, вычислены в [1]. Для сечения Тер-Микаэляна функция $C(s)$ вычислена в [11].

Решая систему (4), находим

$$\Psi(s, \lambda) P(s, \lambda, k) + \left(\frac{kE_k}{2}\right)^2 P(s-2, \lambda, k) = \Phi(s, \lambda, k), \quad (8)$$

$$\Gamma(s, \lambda, k) = \frac{1}{\lambda + \sigma_0} [C(s) P(s, \lambda, k) + \Gamma_s(k) + S_\Gamma(s, \lambda, k)], \quad (9)$$

где

$$\Phi(s, \lambda, k) = P_s(k) + S_P(s, \lambda, k) + B(s) \frac{\Gamma_s(k) + S_\Gamma(s, \lambda, k)}{\lambda + \sigma_0}, \quad (10)$$

$$\Psi(s, \lambda) = \lambda + A(s) - \frac{B(s)C(s)}{\lambda + \sigma_0}. \quad (11)$$

Решение конечно-разностного уравнения (8) можно записать в виде интеграла

$$P(s, \lambda, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq \left(\frac{kE_k}{2}\right)^{2q} \Gamma(-q) \Gamma(q+1) f(s, q, \lambda) \Phi(s-2q, \lambda, k) \quad (12)$$

Легко убедиться, что (12) является решением (8), если выполнены условия

$$\begin{aligned} \Psi(s, \lambda) f(s, q, \lambda) &= f(s-2, q-1, \lambda), \\ f(s, 0, \lambda) &= 1/\Psi(s, \lambda), \quad -1 < \gamma < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Действительно, подставляя (12) в (8) и обозначив

$$H(q) = \left(\frac{E_k k}{2}\right)^{2q} \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \Psi(s, \lambda) f(s, q, \lambda) \Phi(s-2q, \lambda, k),$$

получим для левой части уравнения (8)

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq H(q) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+1-i\infty}^{\gamma+1+i\infty} dq H(q). \quad (14)$$

Имеет место следующая теорема: пусть в замкнутой области M , ограниченной двумя параллельными прямыми L и N , функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме конечного числа особых точек $a_1, a_2, \dots, a_n$, лежащих в области с конечными размерами. Тогда

$$\int_L f(z) dz - \int_N f(z) dz = -2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k), \quad (15)$$

где $\text{res}f(a)$ — вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z=a$. При интегрировании прямая L приходится так, что область M находится при этом справа, а прямая N проходит так, что область M остается слева.

Доказательство: Возьмем на прямой L точки A и B и на прямой N точки C и D так, чтобы точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ попали внутрь четырехугольника $ABCD$. По теореме Коши о вычетах для контура $ABCD$, проходимо по часовой стрелке

$$\int_{ABCD} f(z) dz = -2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}f(a_k).$$

Будем поворачивать отрезки AB и CD так, чтобы они стремились к прямой N , а точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ оставались внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда пределом периметра $ABCD$ будет пара прямых L и N . Откуда следует

$$\lim_{AB, CD \rightarrow N} \int_{ABCD} f(z) dz = \int_L f(z) dz - \int_N f(z) dz.$$

Пусть $\text{Re}q$ выбрана так, что $\text{Re}(s-2q) > 0$. Тогда в области $\gamma \ll \text{Re}q \ll \gamma + 1$, $-1 < \gamma < 0$ функции $f(s, q, \lambda)$ и $\Phi(s-2q, \lambda, k)$ не имеют полюсов, и функция $H(q)$ в этой области имеет один простой полюс в точке $q=0$. Из соотношений (14) и (15) следует

$$J = -\lim_{q \rightarrow 0} qH(q) = \Phi(s, \lambda, k), \quad (16)$$

и мы доказали, что (12) является решением уравнения (8). Применяя к (12) обратное преобразование Меллина по s , получим

$$P(E, \lambda, k) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds E^{-s-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq \left(\frac{kE_k}{2}\right)^{2q} \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \times \\ \times f(s, q, \lambda) \Phi(s-2q, \lambda, k). \quad (17)$$

В этом двойном интеграле произведем замену переменных $s-2q = s'$, $q = q'$. Якобиан преобразования равен 1. Откуда следует

$$P(E, \lambda, k) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-2\gamma-i\infty}^{\alpha-2\gamma+i\infty} ds E^{-s-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq \left(\frac{kE_k}{2}\right)^{2q} \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \times \\ \times f(s+2q, q, \lambda) \Phi(s, \lambda, k). \quad (18)$$

Используя условия (13), можно показать, что для произвольных q

$$f(s+2q, q, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(s+2n+2, \lambda)]^{-q-1} \times \\ \times \prod_{\nu=0, n} \Psi(s+2(q+\nu+1), \lambda) / \Psi(s+2\nu, \lambda). \quad (19)$$

Для $q = n$ — целых положительных

$$f(s+2n, n, \lambda) = \prod_{\nu=0, n} \frac{1}{\Psi(s+2\nu, \lambda)}. \quad (20)$$

Для $q = -n - 1$, $n = 0, 1, \dots$

$$f(s, -n - 1, \lambda) = \prod_{v=1, n} \Psi(s + 2v, \lambda); f(s, -1, \lambda) = 1. \quad (21)$$

Теперь докажем тождество

$$\prod_{v=k, n} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=k}^n \frac{H_i(s + 2m)}{\lambda - \lambda_i(s + 2m)} \prod_{\substack{v=k, n \\ \neq m}} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda_i(s + 2m))}. \quad (22)$$

Функции $\lambda_i(s)$ и $H_i(s)$ определены в [1]. При $k = n$ тождество (22) справедливо, так как $\frac{1}{\Psi(s, \lambda)} = \frac{H_1(s)}{\lambda - \lambda_1(s)} + \frac{H_2(s)}{\lambda - \lambda_2(s)}$. Допуская справедливость тождества (22) при $n = p - 1$, докажем его справедливость для $n = p$.

$$\begin{aligned} \prod_{v=k, p} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda)} &= \frac{1}{\Psi(s + 2p, \lambda)} \prod_{v=k, p-1} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda)} = \\ &= - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=k}^{p-1} \frac{H_i(s + 2m) H_j(s + 2p)}{\lambda_j(s + 2p) - \lambda_i(s + 2m)} \frac{1}{\lambda - \lambda_i(s + 2m)} \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{v=k, p-1 \\ \neq m}} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda_i(s + 2m))} + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=k}^{p-1} \frac{H_i(s + 2m) H_j(s + 2p)}{\lambda_j(s + 2p) - \lambda_i(s + 2m)} \frac{1}{\lambda - \lambda_j(s + 2p)} \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{v=k, p-1 \\ \neq m}} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda_i(s + 2m))} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{m=k}^{p-1} \frac{H_i(s + 2m)}{\lambda - \lambda_i(s + 2m)} \prod_{\substack{v=k, p \\ \neq m}} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda_i(s + 2m))} + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{H_j(s + 2p)}{\lambda - \lambda_j(s + 2p)} \prod_{v=k, p-1} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda_j(s + 2p))} = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{m=k}^p \frac{H_i(s + 2m)}{\lambda - \lambda_i(s + 2m)} \prod_{\substack{v=k, p \\ \neq m}} \frac{1}{\Psi(s + 2v, \lambda_i(s + 2m))}. \end{aligned}$$

Далее мы будем пользоваться теоремой о свертке при обратном преобразовании Лапласа в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} d\lambda e^{\lambda t} f(\lambda) \varphi(\lambda) = \int_0^t d\tau f(t - \tau) \varphi(\tau), \quad (23)$$

где $f(\lambda)$ — образ функции $f(t)$.

Применяя к выражению (19) тождество (22) и пользуясь (23), произведем обратное преобразование Лапласа по λ в (18)

$$P(E, t, k) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\alpha-2\gamma-i\infty}^{\alpha-2\gamma+i\infty} ds \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq E^{-s-1} \left(\frac{kE_k}{2E} \right)^{2q} \Gamma(-q) \times \\ \times \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} G_{im}(s, q) \varphi(s, t, \lambda_i(s+2m), k) H_i(s+2m) e^{\lambda_i(s+2m)t}, \quad (24)$$

где

$$\varphi(s, t, \lambda_i(s+2m), k) = P_s(k) + \frac{B(s)\Gamma_s(k)}{\lambda_i(s+2m) + \sigma_0} + \\ + \int_0^t dt' \left[S_P(s, t', k) + \frac{B(s)S_\Gamma(s, t', k)}{\lambda_i(s+2m) + \sigma_0} \right] e^{-\lambda_i(s+2m)t'}, \quad (25)$$

$$G_{im}(s, q) = \Gamma(q+1) \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(s+2n+2, \lambda_i(s+2m))]^{-q-1} \times \\ \times \prod_{\substack{v=0, n \\ \neq m}} \frac{\Psi(s+2(q+v+1), \lambda_i(s+2m))}{\Psi(s+2v, \lambda_i(s+2m))}, \quad (26)$$

для $q = n$ — целых положительных

$$G_{im}(s, n) = \begin{cases} 0; & m > n \\ n! \prod_{\substack{v=0, n \\ \neq m}} \frac{1}{\Psi(s+2v, \lambda_i(s+2m))}; & m \leq n. \end{cases} \quad (27)$$

Теперь найдем приближенное выражение для функции $\Psi(x, \lambda_i(s))$. Из (11) следует, что функция $\Psi(x, \lambda_i(s))$ имеет нуль в точке $x = s$. Пусть эта функция имеет полюс в точке $x = -r$. Тогда функция $G_{im}(s, q)$, определенная равенством (26), имеет нули по крайней мере в точках

$$q = m-1, m-2, \dots, 0; \quad s = -r, -r-2, \dots \\ s \neq -r-2m$$

и полюса по крайней мере в точках $s+2q = -r-2, -r-4, \dots$

В случае сечения Бете—Гайтлера $r=0$, в случае сечения Тер-Микаэляна $r=1$. Разложим функцию $(x+r)\psi(x, \lambda_i(s))$ в ряд Тейлора в точке $x=s$ и ограничимся первым неисчезающим членом. Полученную функцию обозначим $\psi_0(x, \lambda_i(s))$.

$$(x+r)\psi_0(x, \lambda_i(s)) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x+r)\psi(x, \lambda_i(s)) \right]_{x=s} (x-s), \quad (28)$$

$$\psi_0(x, \lambda_i(s)) = f_i(s) \frac{x-s}{x+r}; \quad f_i(s) = -(s+r) \frac{\lambda'_i(s)}{H_i(s)}.$$

Заменим в (27) функцию ψ на ψ_0 , тогда получим

$$G_{im}^0(s, q) = f_i(s+2m)^{-q} \frac{\Gamma(m-q)\Gamma\left(\frac{s+r}{2} + q + 1\right)}{m! \Gamma(-q)\left(\frac{s+r}{2} + m\right)\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)}. \quad (29)$$

Функция $G_{im}^0(s, q)$ имеет нули по q и полюса в точках, указанных выше.

В области изменения s и q , существенной для вычисления интегралов по s и по q методом перевала, поведение функции $G_{im}^0(s, q)$ не сильно отличается от поведения $G_{im}(s, q)$. Поэтому мы заменим функцию $G_{im}(s, q)$ в (24) на функцию $G_{im}^0(s, q)$. Это позволит найти приближенное выражение для интеграла по q в (24)

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq \left(\frac{kE_k}{2E} \right)^{2q} \Gamma(-q) G_{im}^0(s, q) =$$

$$= \frac{1}{m! (\nu + m) \Gamma(\nu)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq t^{-q} \Gamma(m-q) \Gamma(\nu + q + 1), \quad (30)$$

где

$$t = \frac{4E^2}{k^2 E_k^2} f_i(s + 2m); \quad \nu = \frac{s+r}{2}.$$

Поскольку $m > 0$, $\text{Re}(m - q) > 0$, $t > 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq t^{-q} \Gamma(m-q) \Gamma(\nu + q + 1) =$$

$$= t^{\nu+1} \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dq (tx)^{-\nu-q-1} \Gamma(\nu + q + 1) =$$

$$= \Gamma(\nu + m + 1) \frac{t^{\nu+1}}{(1+t)^{\nu+m+1}}.$$

Здесь мы пользовались соотношением

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds x^{-s} \Gamma(s).$$

Откуда следует

$$J = \frac{\Gamma\left(\frac{s+r}{2} + m\right)}{m! \Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)} \left[\frac{k^2 E_k^2}{4E^2 f_i(s + 2m)} \right]^m \left[1 + \frac{k^2 E_k^2}{4E^2 f_i(s + 2m)} \right]^{-\frac{s+r}{2} - m - 1} \quad (31)$$

Искомая угловая функция электронов при произвольных граничных условиях равна

$$P(E, t, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-2\gamma-i\infty}^{\alpha-2\gamma+i\infty} ds E^{-s-1} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} H_i(s + 2m) e^{\lambda_i(s+2m)t} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{s+r}{2} + m\right)}{m! \Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)} \int_0^{\infty} dk k J_0(k\theta) \left[\frac{k^2 E_k^2}{4E^2 f_i(s + 2m)} \right]^m \times$$

$$\times \left[1 + \frac{k^2 E_k^2}{4E^2 f_i(s + 2m)} \right]^{-\frac{s+r}{2} - m - 1} \varphi(s, t, \lambda_i(s + 2m), k). \quad (32)$$

Рассмотрим конкретный вид граничных условий. Пусть на границу вещества падает по вертикали электрон с энергией E_0 при отсутствии источников. Граничное условие можно записать в виде

$$P(E, t = 0, \theta) = 2\delta(E - E_0) \delta(\theta^2), \quad (33)$$

где $\delta(x)$ — дельта функции.

Выбирая граничное условие в таком виде, мы удовлетворим условию нормировки $\int_0^\infty d\theta \int_0^\infty dE P(E, t = 0, \theta) = 1$.

В этом случае согласно (25) и (6) получаем

$$\varphi(s, t, \lambda_i(s + 2m), k) = P_s(k) = E_0^s. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32), проинтегрируем ряд по m почленно и в каждом слагаемом величину $s + 2m$ обозначим через s

$$P(E, t, \theta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-2\gamma+2m-i\infty}^{\alpha-2\gamma+2m+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} H_i(s) e^{\lambda_i(s)t} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{s+r}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\frac{s+r}{2} - m\right)} \int_0^\infty dk k J_0(k\theta) \left[\frac{k^2 E_k^2}{4E_0^2 f_i(s)} \right]^m \left[1 + \frac{k^2 E_k^2}{4E^2 f_i(s)} \right]^{-\frac{s+r}{2} - 1}$$

Опираясь на теорему 1, контур интегрирования в каждом слагаемом перенесем в точку $Res = \alpha > 0$. Меняя местами интегрирование и суммирование и учитывая соотношение

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu) x^m}{m! \Gamma(\nu - m)} = (1 + x)^{\nu-1},$$

получим

$$P(E, t, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} \sum_{i=1}^2 H_i(s) e^{\lambda_i(s)t} \times \\ \times \left(\frac{E}{P_i(s)}\right)^2 F\left(\frac{s+r}{2}, \frac{E}{E_0}, z\right), \quad (35)$$

где

$$F(\nu, \alpha, z) = \int_0^\infty dx x J_0(xz) (1 + \alpha^2 x^2)^{\nu-1} (1 + x^2)^{-\nu-1}, \quad (36)$$

$$z = \frac{E\theta}{P_i(s)}, \quad P_i(s) = \frac{E_k}{2\sqrt{f_i(s)}}. \quad (37)$$

Число частиц с энергией больше E равно

$$N_P(E, t, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \sum_{i=1}^2 H_i(s) e^{\lambda_i(s)t} \times \\ \times \left(\frac{E}{P_i(s)}\right)^2 \Phi\left(r, s, \frac{E}{E_0}, z\right), \quad (38)$$

где

$$\Phi(r, s, \alpha, z) = \int_1^{\infty} dy y^{1-s} \int_0^{\infty} dx x J_0(xy z) (1 + \alpha^2 x^2 y^2)^{\frac{s+r}{2}-1} (1+x^2)^{-\frac{s+r}{2}-1}. \quad (39)$$

Если выполнено условие $E/E_0 \ll 1$, то функции $F\left(\frac{s+r}{2}, \frac{E}{E_0}, z\right)$ и $\Phi\left(r, s, \frac{E}{E_0}, z\right)$ мало отличаются от функций $F\left(\frac{s+r}{2}, 0, z\right)$ и $\Phi(r, s, 0, z)$, которые равны

$$F\left(\frac{s+r}{2}, 0, z\right) = \frac{z^{\frac{s+r}{2}}}{2^{\frac{s+r}{2}} \Gamma\left(\frac{s+r}{2} + 1\right)} K_{\frac{s+r}{2}}(z), \quad (40)$$

$$\Phi(r, s, 0, z) = \frac{z^{s-2}}{2^{\frac{s+r}{2}} \Gamma\left(\frac{s+r}{2} + 1\right)} \int_z^{\infty} dx x^{\frac{s+r}{2}-s+1} K_{\frac{s+r}{2}}(x). \quad (41)$$

В случае сечения Бете—Гайтлера $r=0$

$$\Phi(0, s, 0, z) = \frac{z^{\frac{s}{2}-1}}{2^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} K_{\frac{s}{2}-1}(z). \quad (42)$$

Выражения (42) и (40) при $r=0$ совпадают с полученными в [1, 6]. Интегралы по s в (35) и (38) могут быть вычислены методом перевала. Членом с экспонентой $\lambda_2(s)$ пренебрегаем, так как он вносит малый вклад в интеграл

$$P(E, t, \theta) = \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \left(\frac{E}{P_1(s)}\right)^2 F\left(\frac{s+r}{2}, \frac{E}{E_0}, z\right) \times \\ \times \left[2\pi\left(\lambda_1''(s)t + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln F\left(\frac{s+r}{2}, \frac{E}{E_0}, z\right)\right)\right]^{-1/2}, \quad (43)$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\ln \frac{E_0}{E} + \frac{\partial}{\partial s} \ln F\left(\frac{s+r}{2}, \frac{E}{E_0}, z\right) \right], \quad (44)$$

$$N_P(E, t, \theta) = \left(\frac{E_0}{E}\right)^s H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \left(\frac{E}{P_1(s)}\right)^2 \Phi\left(r, s, \frac{E}{E_0}, z\right) \times \\ \times \left[2\pi\left(\lambda_1''(s)t + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \ln \Phi\left(r, s, \frac{E}{E_0}, z\right)\right)\right]^{-1/2}, \quad (45)$$

$$t = -\frac{1}{\lambda_1'(s)} \left[\ln \frac{E_0}{E} + \frac{\partial}{\partial s} \ln \Phi\left(r, s, \frac{E}{E_0}, z\right) \right]. \quad (46)$$

Функция $f_1(s)$ и $P_1(s)$, вычисленные для случая сечения Бете—Гайтлера по формулам (28) и (37), даны в табл. 1. Функции $F\left(\frac{s}{2}, 0, z\right)$ и $\Phi(0, s, 0, z)$ даны в таблицах 2 и 3.

Таблица 1

s	$f_1(s)$	$P_1(s)$	s	$f_1(s)$	$P_1(s)$
0,1	4,6912	4,8633	1,6	2,4016	6,7758
0,2	3,4813	5,6276	1,7	2,4394	6,7228
0,3	2,9950	6,0673	1,8	2,4807	6,6665
0,4	2,7258	6,3598	1,9	2,5248	6,6080
0,5	2,5582	6,5049	2,0	2,5712	6,5482
0,6	2,4485	6,7103	2,1	2,6194	6,4877
0,7	2,3760	6,8119	2,2	2,6690	6,4270
0,8	2,3295	6,8796	2,3	2,7198	6,3668
0,9	2,3021	6,9203	2,4	2,7713	6,3075
1,0	2,2896	6,9392	2,5	2,8234	6,2489
1,1	2,2889	6,9403	2,6	2,8759	6,1916
1,2	2,2977	6,9269	2,7	2,9286	6,1356
1,3	2,3146	6,9016	2,8	2,9812	6,0812
1,4	2,3382	6,8667	2,9	3,0338	6,0283
1,5	2,3674	6,8242	3,0	3,0862	5,9769

Функции $f_1(s)$ и $P_1(s)$, вычисленные по формулам (28) и (37) для случая сечения Бете—Гайтлера.

Таблица 2

s \ z	$F\left(\frac{s}{2}, 0, z\right)$				
	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
0,0	2,0000	1,0000	0,6666	0,50000	0,40000
0,1	1,3998	0,90326	0,64154	0,48932	0,39232
0,2	1,1648	0,81872	0,60978	0,47757	0,37869
0,3	0,99422	0,74082	0,57245	0,45840	0,36579
0,4	0,85962	0,67032	0,53441	0,43687	0,35138
0,5	0,74917	0,60653	0,49692	0,41411	0,33598
0,6	0,65646	0,54881	0,46069	0,39085	0,31999
0,7	0,57753	0,49659	0,42609	0,36760	0,30373
0,8	0,50964	0,44933	0,39334	0,34471	0,28744
0,9	0,45084	0,40657	0,36253	0,32244	0,27744
1,0	0,39961	0,36788	0,33369	0,30095	0,27132
1,1	0,35479	0,33287	0,30679	0,28037	0,25552
1,2	0,31544	0,30119	0,28177	0,26076	0,24013
1,3	0,28079	0,27253	0,25856	0,24216	0,22526
1,4	0,25021	0,24660	0,23709	0,22459	0,21095
1,5	0,22316	0,22313	0,21724	0,20804	0,19724
1,6	0,19920	0,20190	0,19893	0,19251	0,18417
1,7	0,17794	0,18268	0,18207	0,17796	0,17175
1,8	0,15905	0,16530	0,16654	0,16436	0,15997
1,9	0,14225	0,14957	0,15227	0,15168	0,14884
2,0	0,12729	0,13534	0,13917	0,13987	0,13834
3,0	4,2803 10^{-2}	4,9787 10^{-2}	5,5593 10^{-2}	6,6235 10^{-2}	6,3792 10^{-2}
4,0	1,4745 10^{-2}	1,8316 10^{-2}	2,1752 10^{-2}	2,4967 10^{-2}	2,7902 10^{-2}
5,0	5,1500 10^{-3}	6,7379 10^{-3}	8,4068 10^{-3}	1,0111 10^{-2}	1,1812 10^{-2}
6,0	1,8150 10^{-3}	2,4787 10^{-3}	3,2226 10^{-3}	4,0318 10^{-3}	4,8907 10^{-3}
7,0	6,4372 10^{-4}	9,1188 10^{-4}	1,2281 10^{-3}	1,5896 10^{-3}	1,9925 10^{-3}
8,0	2,2938 10^{-4}	3,3547 10^{-4}	4,6598 10^{-4}	6,2148 10^{-4}	8,0186 10^{-4}
9,0	8,2031 10^{-5}	1,2341 10^{-4}	1,7621 10^{-4}	2,4137 10^{-4}	3,1961 10^{-4}
10,0	2,9421 10^{-5}	4,5400 10^{-5}	6,6447 10^{-5}	9,3245 10^{-5}	1,2641 10^{-4}

Значения функции $F\left(\frac{s}{2}, 0, z\right)$, вычисленной по формуле (40).

Таблица 3

s \ z	$\Phi(0, s, 0, z)$		
	0,5	1,0	1,5
0,1	29,091	9,0326	3,0869
0,2	9,7762	4,0936	1,8170
0,3	4,9997	2,4694	1,2659
0,4	3,0291	1,6758	0,94785
0,5	2,0155	1,2131	0,73885
0,6	1,4214	0,91469	0,59101
0,7	1,0433	0,70941	0,48138
0,8	0,78827	0,56166	0,39736
0,9	0,60887	0,45174	0,33141
1,0	0,47850	0,36788	0,27867
1,1	0,38132	0,30261	0,23590
1,2	0,30737	0,25100	0,20081
1,3	0,25015	0,20964	0,17174
1,4	0,20524	0,17614	0,14747
1,5	0,16956	0,14875	0,12703
1,6	0,14095	0,12619	0,10982
1,7	0,11779	0,10746	9,5172 10^{-2}
1,8	9,8891 10^{-2}	9,1833 10^{-2}	8,2673 10^{-2}
1,9	8,3375 10^{-2}	7,8720 10^{-2}	7,1968 10^{-2}
2,0	7,0555 10^{-2}	6,7668 10^{-2}	6,2770 10^{-2}
3,0	1,5342 10^{-2}	1,6596 10^{-2}	1,7234 10^{-2}
4,0	3,8990 10^{-3}	4,5789 10^{-3}	5,1413 10^{-3}
5,0	1,0782 10^{-3}	1,3476 10^{-3}	1,6061 10^{-3}
6,0	3,1442 10^{-4}	4,1312 10^{-4}	5,1672 10^{-4}
7,0	9,5088 10^{-5}	1,3027 10^{-4}	1,6967 10^{-4}
8,0	2,9531 10^{-5}	4,1933 10^{-5}	5,6555 10^{-5}
9,0	9,3583 10^{-6}	1,3712 10^{-5}	1,9069 10^{-5}
10,0	3,0131 10^{-6}	4,5400 10^{-6}	6,4881 10^{-6}

Значения функции $\Phi(r, s, 0, z)$ для случая сечения Бете—Гайтлера ($r = 0$), вычисленной по формуле (42).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. М., Гостехиздат, 1948.
2. Nishimura J., Kamata K. Progr. Theor. Phys., **6**, 262, 1951.
3. Euges L., Fernbach S. Phys. Rev., **82**, 23, 1951.
4. Euges L., Fernbach S. Phys. Rev., **82**, 287, 1951.
5. Moliere G. Kosmische Strahlung, hrsg. von Heisenberg, Berlin, Springer—Verlag, 1953.
6. Гужавин В. В., Иваненко И. П. ЖЭТФ, **40**, вып. 6, 1682, 1961.
7. Chartress V. A., Messel H. Phys. Rev., **104**, 517, 1959.
8. Gardner J. W., Proc. Phys. Soc., **A75**, 482, 1960.
9. Nishimura J., Kamata K. Suppl. Progr. Theor. Phys., **6**, 93, 1958.
10. Тер-Микаэлян. «Изв. АН СССР», сер. физич., **19**, № 6, 657, 1955.
11. Бахтадзе А. К., Иваненко И. П. «Ядерная физика», **4**, вып. 1, 161, 1966.

Поступила в редакцию
5. 4 1966 г.

НИИЯФ