Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1967

УДК 533.95.2

В. Н. МЕЛЬНИКОВ

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ КУЛОНОВСКИХ СИСТЕМ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

Получено приближенное значение для ядра линеаризованного уравнения Ленарда и с его помощью найдено выражение для функции Грина. Точно вычислено ее асимптотическое значение при малых k, а также собственные частоты и затухание системы при наличии пространственной дисперсии. Приведено асимптотическое значение спектральной плотности.

В предыдущей работе [1] было получено решение для функции Грина кулоновской системы со столкновениями в E- и k-пространстве

$$f^1(E, k) = -i \frac{\int \frac{\widehat{M}G^0\, dp}{\left(E - \frac{\bar{k}\bar{p}}{m}\right)}}{\left\{1 - \frac{2kn\Phi(k)}{\sqrt{2\pi m\theta}} B(E, k)\right\}}, \tag{1}$$

где

$$\widehat{M}G^0 = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left\{G^0(E, k, p) V_1^\alpha(p) - \frac{\partial G^0(E, k, p)}{\partial p_\beta} V_2^{\alpha\beta}(p)\right\},$$

$$V_1^\alpha(p) = \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta} \frac{\partial F^0(p_2)}{\partial p_{2\beta}}, \quad V_2^{\alpha\beta}(p) = \int dp_2 Q^0_{\alpha\beta} F^0(P_2), \tag{2}$$

$$\underset{(11,22)}{Q^0_{ij}}(p_1, p_2) = \frac{e^4 mn}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|} \int_0^{2\pi} d\varphi \varkappa_i \varkappa_j \left\{\ln \frac{B^2}{\sqrt{(Re\chi^0)^2 + (Im\chi^0)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{Re\chi^0}{Im\chi^0} \operatorname{arctg} \frac{Im\chi^0}{Re\chi^0}\right\}, \tag{3}$$

$$Re\chi^0 = 1 - 2\left(\frac{u}{p_\text{т}}\right) e^{-\left(\frac{u}{p_\text{т}}\right)^2} \int_0^{u/p_\text{т}} e^{x^2} dx,$$

$$Im\chi^0 = -\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{p_\text{т}}\right) e^{-\left(\frac{u}{p_\text{т}}\right)^2}. \tag{4}$$

Будем исследовать (1), взяв более точное ядро, чем ядро линеаризованного уравнения Ландау, использованного в вычислениях в [1].

Попытаемся подобрать простую функцию, правильно передающую ход подынтегрального выражения в (3). Используя (4), при малых $z = \frac{u}{p_т}$ находим

$$\psi = \sqrt{(Re\chi^0)^2 + (Im\chi^0)^2} \cong 1 - az^2, \quad a = \frac{4-\pi}{2}.$$

При больших z $\psi \cong \frac{1}{2z^2}$. При остальных z ψ спадает от 1 до 0. Итак, функция $\frac{1}{(1+az^2)}$ будет хорошо передавать ход ψ при всех z, так как при малых z она $\sim 1 - az^2$, при больших $\sim \frac{1}{az^2}$, а в промежутке монотонно спадает от 1 до 0. Мы использовали в ψ $a = \frac{4-\pi}{2}$, а не $a = 2$, так как наиболее важно поведение Q^0_{ij} при малых импульсах, ибо в [3] она интегрируется с обрезывающим фактором $F^0(p)$. Поскольку второй член в подынтегральном выражении в [4] $\ll 1$, то им можно пренебречь, в отличие от первого, который всегда не менее $\ln B^2$. Используя найденное значение ψ, из (3) получим

$$\underset{(11,22)}{Q^0_{ij}} = \frac{e^4mn}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \varkappa_i \varkappa_j \ln\{B^2(1+az^2)\} = Q^{0'}_{ij} + Q^{0''}_{ij},$$

$$\underset{(11,22)}{Q^{0'}_{ij}} = \frac{2\pi mne^4}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|} \ln \mathscr{B}, \quad Q^{0''}_{ij} = \frac{e^4mn}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \varkappa_i \varkappa_j (1+az^2), \tag{5}$$

$Q^{0''}_{ij}$ вычисляется в системе координат, где $\bar{p} \parallel \bar{e}_3$.

Учитывая, что $u = \bar{\varkappa}\bar{p}$, получим

$$Q^{0''}_{11} = \frac{2\pi mne^4}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+c}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+c}}{1+\sqrt{1+c}}\right), \tag{6}$$

$$Q^{0''}_{22} = \frac{2\pi mne^4}{|\bar{p}_1 - \bar{p}_2|}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1+c}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+c}}{1+\sqrt{1+c}}\right), \tag{7}$$

где $c = a\left(\frac{p}{p_т}\right)^2$. Итак, в выделенной нами системе тензор Q^0_{ij} диагонален. Значит в любой другой системе он будет симметричен по $\bar{p}_1$ и $\bar{g} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ и запишется так:

$$Q^0_{\alpha\beta} = D_1\delta_{\alpha\beta} + D_2\frac{g_\alpha g_\beta}{g^2} + D_3\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} + D_4(p_\alpha g_\beta + p_\beta g_\alpha).$$

Сравнивая общий вид симметричного тензора с (5), (6) и (9), находим в произвольной системе

$$Q^0_{\alpha\beta} = Q^0_{11}\left(\frac{g^2\delta_{\alpha\beta} + g_\alpha g_\beta}{g^2}\right) + (Q^0_{22} - Q^0_{11})\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} =$$

$$= \Omega\frac{g^2\delta_{\alpha\beta} - g_\alpha g_\beta}{g^3} + \Omega_\alpha\frac{p_\beta}{g},$$

$$\Omega = 2\pi mne^4\left(\ln B + \ln\frac{1+\sqrt{1+c}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{1+c}}{1+\sqrt{1+c}}\right),$$

$$\Omega_\alpha = \frac{2\pi mne^4 p_\alpha}{p^2}\left(\frac{\sqrt{1+c}-1}{\sqrt{1+c}+1}\right). \tag{8}$$

Введем $V_2^{\alpha\beta} = \widetilde{V}_2^{\alpha\beta} + \Delta_2^{\alpha\beta}$, $V_1^\alpha = \widetilde{V} + \Delta_1^\alpha$, соответствующие вкладам от первого и второго членов в (9). Первый член (8) по форме совпадает с ядром линеаризованного уравнения Ландау, Ω не зависит от $\bar{g}$, поэтому его вклад в V_1^α и $V_2^{\alpha\beta}$ в системе координат, где $\bar{p} \| \bar{e}_3$, даст, как и в [1], следующее

$$\widetilde{V}_1^\alpha = \frac{4\Omega V}{p_\text{т}\sqrt{\pi}p}\,\delta_{\alpha 3},\quad \widetilde{V}_2^{\alpha\beta} = \frac{\Omega\Phi\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)}{p}\{\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha 3}\} +$$

$$+ \frac{\Omega p_\text{т} V}{p^2\sqrt{\pi}}\{\delta_{\alpha\beta} - 3\delta_{\alpha 3}\}.$$

Аналогичные вычисления приводят к поправкам

$$\Delta_1^\alpha = \frac{2\Omega_\alpha V}{p_\text{т}\sqrt{\pi}},\quad \Delta_2^{\alpha\beta} = \frac{\Omega_\alpha p_\beta \Phi\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)}{p}.$$

В произвольной системе координат при

$$S\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right) = 2\pi mne^4\left(\ln B + \ln\frac{1+\sqrt{1+c}}{2}\right),$$

$$D\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right) = 2\pi ne^4 m\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{1+c}}{1+\sqrt{1+c}}\right)\right\}$$

находим

$$V_1^\alpha = \frac{4SVp_\alpha}{p_\text{т}\sqrt{\pi}p^2},\quad V_2^{\alpha\beta} = \left\{\frac{(S+D)\Phi}{p} + \frac{(S+D)p_\text{т}V}{p^2\sqrt{\pi}}\right\}\delta_{\alpha\beta} -$$

$$-\left\{\frac{(S+3D)\Phi}{p} + \frac{3(S+D)p_\text{т}V}{p^2\sqrt{\pi}}\right\}\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}. \tag{9}$$

Поскольку $\frac{1}{2}\left|\frac{1-\sqrt{1+c}}{1+\sqrt{1+c}}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, то этим членом всегда можно пренебречь в отличие от $\ln B$. Тогда (8) можно переписать так:

$$V_1^\alpha(p) = \frac{4SVp_\alpha}{p_\text{т}\sqrt{\pi}p^2},\quad V_2^{\alpha\beta}(p) = \left\{\frac{S\Phi\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)}{p} + \frac{Sp_\text{т}V}{p^2\sqrt{\pi}}\right\}\delta_{\alpha\beta} -$$

$$-\left\{\frac{S\Phi\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)}{p} + \frac{3Sp_\text{т}V}{p^2\sqrt{\pi}}\right\}\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}. \tag{10}$$

Подставляя (9) в (2) и (1), получим

$$\alpha = \frac{8\pi zEk^2}{3m}\int\limits_0^\infty \frac{S\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)\Phi\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)e^{-\left(\frac{p}{p_\text{т}}\right)^2}p}{\left(\frac{k^2p^2}{m^2} - E^2\right)^2}\,dp -$$

$$-\frac{16\pi zEk^4p_т^2}{3m}\int\limits_0^\infty \frac{S\left(\frac{p}{p_т}\right)\Phi\left(\frac{p}{p_т}\right)pe^{-\left(\frac{p}{p_т}\right)^2}}{\left(\frac{k^2p^2}{m^2}-E^2\right)^3}dp+$$

$$+\frac{32\sqrt{\pi}zEk^4p_т}{3m^3}\int\limits_0^\infty \frac{S\left(\frac{p}{p_т}\right)e^{-2\left(\frac{p}{p_т}\right)^2}p^2dp}{\left(\frac{k^2p^2}{m^2}-E^2\right)^3}. \qquad (11)$$

Вычислим (11) при малых k, так как при больших k интегралы по импульсам снова расходятся в нуле. В низшем приближении по k

$$\alpha_0=\frac{2\sqrt{2}\pi Azk^2p_т^2}{3mE^3}+\frac{8\pi Fzk^2p_т^2}{3mE^3}\int\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+ay^2}}{2}\right)\Phi(y)\,ye^{-y^2}dy, \qquad (12)$$

$$F=2\pi mne^4,\quad A=F\lg B.$$

Произведем оценку второго члена в (12)

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+ay^2}}{2}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{ay^2}{2}\right)\leqslant\frac{ay^2}{2},$$

поэтому

$$\int\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+ay^2}}{2}\right)\Phi(y)\,ye^{-y^2}dy<\frac{a}{2}\int\Phi(y)\,y^3e^{-y^2}dy\cong\frac{0{,}134}{\sqrt{2}}.$$

Так как $F\ll 4A$, то, пренебрегая вторым членом в (12), находим

$$\alpha_0=\frac{2\sqrt{2}\pi Azk^2p_т^2}{3mE^3}.$$

Заметим, что это α_0 в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем получающееся при использовании ядра Ландау. Дело в том, что здесь учитывается вклад от всех импульсов, а не только от малых значений. Точно такие же изменения будут и в $\nu_{эфф}$ и в функции Грина (1), полюса которой дадут следующие собственные частоты и затухание волн без учета пространственной дисперсии:

$$\gamma=-\gamma_л-\frac{\sqrt{\pi}\varepsilon\omega_0\ln(4\pi nr_d^3)}{24\pi^2},$$

$$\omega^2=\omega_0^2\left\{1-\frac{\varepsilon^2\ln^2(4\pi nr_d^3)}{576\pi^3}\right\}.$$

Если в (11) учесть следующее приближение по k, то появится пространственная дисперсия плазменных волн на фоне. Как и в (12), здесь вклад от $\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+c}}{2}\right)$ будет намного меньше, чем от $\ln B$. Проводя соответствующие вычисления, находим

$$\alpha=\alpha_0\left(1+\frac{7}{2}h\right),\ \text{где}\ h=\frac{k^2p_т^2}{m^2E^2}=\frac{2\theta k^2}{mE^2}.$$

Тогда согласно (1)

$$f^1(E,k) = -if^0 \frac{\nu_{\text{эфф}}(1+2h)}{E\mathscr{E}},$$

$$f^0(E,\ k) = \frac{nk^2}{2\pi m E^2 \mathscr{E}}\left(1+\frac{3}{2}h\right).$$

Полная функция Грина в E- и k-представлениях в данном приближении равна

$$f(E,\ k) = f^0 + f^1 = \frac{f^0(E,\ k)}{1+i\dfrac{\nu_{\text{эфф}}(1+2h)}{E\mathscr{E}}},$$

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}\frac{ne^4 \ln B}{m^{1/2}\theta^{3/2}}. \tag{13}$$

Для определения частот и затухания при столкновениях частиц на фоне получаем уравнение

$$E\mathscr{E} + i\nu_{\text{эфф}}(1+2h) = 0,\ \mathscr{E} = 1 - \frac{\omega_0^2}{E^2}\left(1+\frac{3}{2}h\right).$$

Отсюда

$$\gamma = -\gamma_{\text{л}} - \frac{\sqrt{\pi}\,\varepsilon\omega_0 \ln(4\pi n r_d^3)}{24\pi^2}\left(1+\frac{4\theta k^2}{m\omega_0^2}\right),$$

$$\omega^2 = \omega_0^2\left\{1-\frac{\varepsilon^2 \ln^2(4\pi n r_d^3)}{576\pi^3}\right\} + \frac{3\theta k^2}{m}\left\{1-\frac{\varepsilon^2 \ln^2(4\pi n r^3 d)}{216\pi^3}\right\}.$$

Поскольку есть асимптотическое по k значение функции Грина, то можно вычислить тоже асимптотическое значение спектральной плотности. Согласно [2]:

$$\langle\langle A \mid B \rangle\rangle_E^{ret} = \frac{1}{2\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)\,\omega\,\frac{d\omega}{E-\omega+i\varepsilon}.$$

Откуда

$$I(E) = -\frac{2\theta}{E}\,Im \langle\langle A \mid B \rangle\rangle_E^{ret},$$

что для нашего случая малых k согласно (18) дает

$$I(E,k) = -\frac{2\theta}{E}\,Im f(E,\ k) = -\frac{2\theta}{E}\,Im\left\{\frac{f^0 E\mathscr{E}}{E\mathscr{E}+i\nu_{\text{эфф}}(1+2h)}\right\} =$$

$$= \frac{2\theta f^0 \mathscr{E}\nu_{\text{эфф}}(1+2h)}{E^2\mathscr{E}^2+\nu_{\text{эфф}}^2(1+4h)} = \frac{\theta n k^2 \nu_{\text{эфф}}\left(1+\dfrac{7}{2}h\right)}{\pi m\left\{\left[E^2-\omega_0^2\left(1+\dfrac{3}{2}h\right)\right]^2+\nu_{\text{эфф}}^2(1+4h)E^2\right\}}.$$

Напомним, что все полученные величины справедливы при временах процесса, лежащих в интервале $\tau_{\text{шн}} < t_{\text{пр}} < \tau_{\text{рел}}$.

В заключение выражаю благодарность акад. Н. Н. Боголюбову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников В. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 3, 1967.
2. Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И. ЖЭТФ, 43, 8, 1962.

Поступила в редакцию
12. 4 1966 г.

Кафедра
квантовой статистики