

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 4 — 1967

УДК 538.3:530.145

О. Ф. ДОРОФЕЕВ

К ВОПРОСУ О РАССЕЯНИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрена задача о рассеянии релятивистских электронов на сферически симметричном силовом центре в однородном магнитном поле. Предполагается, что начальное состояние электрона соответствует движению строго вдоль поля.

Как известно (см., например, [1], § 28), энергия электрона, движущегося в магнитном поле, принимает дискретные значения. Если магнитное поле направлено по оси z , энергетический спектр электрона

$$E = c\hbar \sqrt{k_0^2 + 4\gamma n + k_z^2}, \quad \gamma = \frac{e_0 H}{2c\hbar}, \quad k_0 = \frac{mc}{\hbar}$$

содержит квантованную часть, соответствующую вращению электрона, причем главное квантовое число $n=0, 1, 2, \dots$ оказывается также непосредственно связанным с радиусом орбиты вращения электрона

$R = \sqrt{\frac{n + 1/2}{\gamma}}$. Непрерывно меняющаяся часть энергии ($k_z = \frac{p_z}{\hbar}$ — импульс вдоль поля) соответствует поступательному движению вдоль вектора напряженности магнитного поля.

При движении электрона по орбите с макроскопическим радиусом главное квантовое число достигает очень больших значений (при $R = 1$ см и $H = 10^4$ эрст $n \sim 10^{11}$), поэтому расстояние между отдельными уровнями энергии становится исчезающе малым ($\Delta n \ll n$) и спектр, таким образом, имеет квазинепрерывный характер.

Напротив, при малых значениях n , когда электрон движется по окружности малого радиуса, квантование энергии становится особо существенным* и может сказаться на ряде эффектов. Ранее [2] было выяснено, что излучение электронов, находящихся на низких энергетических уровнях, тем существеннее отличается от результатов классической теории, чем меньше главное квантовое число.

* Заметим, что электрон в магнитном поле всегда имеет вращение. Даже при $n=0$ такое вращение остается и происходит по окружности минимального радиуса $R_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2\gamma}} = \frac{\hbar}{mc} \sqrt{\frac{H_0}{H}}$, где $H_0 = \frac{m^2 c^3}{e_0 \hbar} = 10^{13}$ эрст, допускаемого соотношением неопределенностей.

В данной работе рассматривается задача о рассеянии электрона, движущегося в магнитном поле, на сферически симметричном силовом центре. При этом известный интерес представляет случай рассеяния электронов, движущихся параллельно магнитному полю (см. также [3]), когда $n=0$. Этот случай допускает простое и точное сравнение с рассеянием свободных электронов и тем самым дает возможность выяснить характер влияния магнитного поля на процесс рассеяния.

Решение поставленной задачи целесообразно проводить с учетом поляризации электронного спина. Действительно, поскольку магнитное поле, выделяя в пространстве преимущественное направление, влияет на поляризацию электронного спина, рассеяние электронов с ориентированным спином в магнитном поле может иметь особенности по сравнению с рассеянием свободных электронов.

Борновское приближение (см. [1]) в задаче о рассеянии электрона на потенциале типа Юкавы

$$U = - \frac{ze_0^2}{|\vec{r} - \vec{a}|} e^{-\kappa_0 |\vec{r} - \vec{a}|}$$

приводит к вероятности квантовых переходов электрона из состояния n, s, k_3, ζ в состояние n', s', k'_3, ζ'

$$w = \frac{2\pi}{\hbar^2} \delta(K - K') |\langle U \rangle|^2. \quad (1)$$

Здесь квантовые числа: n — главное, s — радиальное; k_3 — импульс вдоль поля, $\zeta = \pm 1$ — проекция спина, составляя полный набор чисел, задающих состояние электрона. Матричный элемент

$$\langle U \rangle = \int \psi'^* U \psi d^3x \quad (2)$$

должен быть найден с помощью волновых функций электрона, подчиняющихся уравнению Дирака. Решение уравнения Дирака для электрона, движущегося в однородном и постоянном магнитном поле с учетом двух возможных определений состояния поляризации электронного спина (продольной поляризации — по отношению к направлению магнитного поля и поперечной поляризации — по отношению к направлению магнитного поля), можно найти в ряде работ (см., например, [4]), поэтому нет необходимости приводить его здесь.

Рассматривая рассеяние электронов, движущихся параллельно магнитному полю, нужно выбрать начальное состояние с $n=0, s=0$. При этом орбитальное магнитное число $l=n-s$ также равно нулю (см. [4]). Представляя рассеивающий потенциал в виде ряда Фурье

$$U = - \frac{ze_0^2}{\pi L} \sum_{\kappa_3} \int \frac{e^{-i\kappa_3 |\vec{r} - \vec{a}|}}{x^2 + \kappa_0^2} dx_1 dx_2$$

(постоянный вектор $\vec{a}$ задает положение рассеивающего центра), нетрудно получить выражение для матричного элемента (2) в виде

$$\langle U \rangle = (c_2' c_2 + c_4' c_4) J,$$

где c_i — спиновые коэффициенты, вид которых зависит от выбора поляризации спина, а интеграл J после довольно несложного интегрирования приводится к виду

$$J = - \frac{ze_0^2}{L} e^{ia_3(k_3 - k'_3)} e^{-iL\varphi'} \int_0^\infty \frac{dx}{x + c} I_{0n'}(x) I_{0s'}(x) J_L(2a\sqrt{\gamma x}).$$

Здесь a , φ' и a_3 — цилиндрические координаты рассеивающего центра $c = \frac{x_0^2 + (k_3 - k'_3)^2}{4\gamma}$, а J_e и I_{mn} — соответственно функция Бесселя и функция Лагерра (более подробно см. [1]).

Заметим далее, что вероятность рассеяния зависит от билинейной величины

$$JJ^* = \frac{z^2 e_0^4}{L^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x+c} I_{0n'}(x) I_{0s'}(x) J_{e'}(2a\sqrt{\gamma x}) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{dy}{y+c} I_{0n'}(y) I_{0s'}(y) J_{e'}(2a\sqrt{\gamma y}). \quad (3)$$

Рассматривая процесс однократного рассеяния на некоторой совокупности силовых центров, распределенных в пространстве в простейшем случае равномерно с плотностью n_0 (см. также [5]), проинтегрируем вероятность рассеяния (1) по координатам рассеивающего центра

$$\bar{w} = n_0 \int_{-L/2}^{L/2} da_3 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty ada w.$$

Учитывая значение интеграла

$$\int_0^\infty J_{e-e'}(a\sqrt{x}) J_{e-e'}(a\sqrt{x'}) ada = 2\delta(x-x'),$$

получим для билинейной комбинации (3) выражение

$$\overline{JJ^*} = \frac{z^2 e_0^4}{L\gamma} n_0 \pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x+c)^2} I_{0,n'}^2(x) I_{0,s'}^2(x),$$

при этом вероятность рассеяния равна

$$\bar{w} = \frac{2\pi}{ch^2} \delta(K-K') \{c_2^{1+} c_2 + c_4^{1+} c_4\}^2 \overline{JJ^*}.$$

Спиновые коэффициенты имеют вид

$$\{c_2^{1+} c_2 + c_4^{1+} c_4\}^2 = \begin{cases} \frac{1}{8} (1-\zeta) \left(1-\zeta' \frac{k_0}{k'}\right) \left[1 + \frac{k_3 k'_3}{K^2} + \zeta \zeta' \frac{k_0 k'}{K^2}\right] & \text{для поляризации вдоль поля} \\ \frac{1}{8} \left(1-\tilde{\zeta} \frac{k_3}{|k_3|}\right) \left(1-\tilde{\zeta}' \frac{k'_3}{|\tilde{k}'|}\right) \left[(1+\tilde{\zeta} \tilde{\zeta}') + \frac{k_0^2}{K^2} (1-\tilde{\zeta} \tilde{\zeta}')\right] & \text{для продольной поляризации.} \end{cases}$$

Значения $\zeta = \pm 1$ характеризуют проекцию спина на направление внешнего магнитного поля (по полю и против поля соответственно), а $\tilde{\zeta} = \pm 1$ — проекцию спина на направление движения электрона (по движению и против движения соответственно), $k = \sqrt{K^2 - k_3^2}$, причем в начальном состоянии $k = k_0$, $\tilde{k} = \sqrt{K^2 - k_0^2}$.

Рассмотрим более подробно случай поляризации спина электрона вдоль магнитного поля. Для вероятности получим выражение

$$\overline{\omega} = \frac{\pi^2}{ch^2} \frac{z^2 e_0^4 n_0 K}{2L\gamma} (1 - \zeta) P_{n'}, \quad (4)$$

где

$$P_{n'} = \delta(k_3^2 - k_3'^2 - 4\gamma u') \left(1 - \zeta' \frac{k_0}{k'}\right) \times \\ \times \left[1 + \frac{k_3 k_3'}{K^2} + \frac{k_0 k'}{K^2}\right] \int_0^\infty \frac{dx}{(x+c)^2} I_{0,n'}^2(x) I_{0,s'}^2(x). \quad (5)$$

Суммирование по конечному главному квантовому числу n' легче всего можно провести, если представить δ -функцию в (5) в виде интеграла Фурье. Тогда суммирование производится элементарно, в результате чего получаем

$$\sum_{n'=0}^\infty P_{n'} = 4\gamma \left[1 + \frac{k_3 k_3'}{K^2} + \zeta \zeta' \frac{k_0 k'}{K^2}\right] \left(1 - \zeta' \frac{k_0}{k'}\right) \times \\ \times \frac{I_{0,s'}^2\left(\frac{k_3^2 - k_3'^2}{4\gamma}\right)}{[\kappa_0^2 + 2k_3(k_3 - k_3')]^2}.$$

Далее учтем, что сумму по k_3' можно заменить интегралом (спектр непрерывен) и поскольку

$$\frac{1}{L} \sum_{k_3'} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int dk_3',$$

вероятность рассеяния равна

$$W = \frac{\pi^2}{ch^2} \frac{z^2 e_0^4 n_0}{16\gamma^2} (1 - \zeta) \int_{-k_3}^{k_3} dk_3' \left(1 - \zeta' \frac{k_0}{k'}\right) \times \\ \times \left[1 + \frac{k_3 k_3'}{K^2} + \zeta \zeta' \frac{k_0 k'}{K^2}\right] \frac{I_{0s'}^2\left(\frac{k_3^2 - k_3'^2}{4\gamma}\right)}{\left[\frac{\kappa_0^2 + 2k_3(k_3 - k_3')}{4\gamma}\right]^2}.$$

Полагая далее $\frac{k_3}{K} = \lambda$, $k_3' = k_3 \cos \theta$, получим

$$W = \frac{z^2 e_0^4 n_0 K k_3}{ch^2} 2\pi \frac{(1 - \zeta)}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left\{ \frac{2k_0^2 + k_3^2 (1 + \cos \theta)}{K^2} - \right. \\ \left. - \zeta' \frac{k_0}{k} \frac{2 + \lambda^2 \cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 \theta}} \right\} \frac{I_{0s'}^2\left(\frac{k_3^2 \sin^2 \theta}{4\gamma}\right)}{[\kappa_0^2 + 2k_3^2 (1 - \cos \theta)]^2}. \quad (6)$$

Рассмотрим прежде всего спиновые эффекты в дифференциальной вероятности рассеяния. Решающим отличием от случая свободного

движения является возможность движения только таких электронов, у которых в начальный момент времени (до рассеяния) спин был ориентирован против магнитного поля ($\xi = -1$). Далее найдем отношение вероятности рассеяния, сопровождающегося изменением ориентации спина $w^{\uparrow\downarrow}$, к вероятности рассеяния с сохранением ориентации спина $w^{\uparrow\uparrow}$, т. е.

$$\eta = \frac{w^{\uparrow\downarrow}}{w^{\uparrow\uparrow}} = \frac{w(\xi' = 1)}{w(\xi' = -1)} = \frac{2(1 - \beta^2) + \beta^2(1 + \cos \theta) - [2 + \beta^2 \cos \theta (1 - \cos \theta)] \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}}}{2(1 - \beta^2) + \beta^2(1 + \cos \theta) + [2 + \beta^2 \cos \theta (1 - \cos \theta)] \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}}}.$$

Отсюда следует, что при рассеянии на угол $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ (рассеяние вперед и назад соответственно) спин электрона сохраняет свою ориентацию и направлен против вектора напряженности магнитного поля. Величина отношения η в нерелятивистском случае исчезающе мала ($\sim \beta^4$)

$$\eta_{\beta \rightarrow 0} = \frac{1}{16} \beta^4 \sin^2 \theta (1 + \cos \theta)^2,$$

а в ультрарелятивистском приближении ($1 - \beta^2 \ll 1$) отношение η достигает максимума при $\theta = \frac{\pi}{2}$, стремясь к единице:

$$\eta_{\beta \rightarrow 1} = 1 - 4\sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow 1.$$

Для случая продольной поляризации электронного спина выражение, аналогичное (6), принимает вид

$$W = \frac{z^2 e^4 \pi n_0 K k_3}{\hbar^2} \left(1 - \xi \frac{k_3}{|k_3|}\right) \left[1 + \tilde{\xi} \tilde{\xi}' + \frac{k_0^2}{K^2} (1 - \tilde{\xi} \tilde{\xi}')\right] \times \\ \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[1 - \tilde{\xi}' \frac{k_3}{|k_3|} \cos \theta\right] \frac{I_{0s'}^2 \left(\frac{k_3^2}{4\gamma} \sin^2 \theta\right)}{[x_0^2 + 2k_3(1 - \cos \theta)]^2}.$$

Из этой формулы вновь следует, что спин электрона до рассеяния всегда ориентирован против направления движения электрона, так как $\tilde{\xi} \frac{k_3}{|k_3|} = -1$. Отношение

$$\eta = \frac{w^{\leftarrow}}{w^{\rightarrow}} = \frac{k_0^2}{K^2} \frac{1 + \tilde{\xi} \frac{k_3}{|k_3|} \cos \theta}{1 - \tilde{\xi}' \frac{k_3}{|k_3|} \cos \theta} = \frac{k_0^2}{K^2} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

не отличается от случая рассеяния свободных электронов (см. [1, 6]).

Наконец, сравним дифференциальную вероятность рассеяния со случаем кулоновского рассеяния свободных электронов. Как уже упоминалось, такое сравнение выглядит особенно просто. Полагая $x_0 \rightarrow 0$ и производя суммирование по конечным спиновым состояниям, получаем

$$W = \frac{z^2 e^4 n_0}{2c \hbar^2 K k_3^3} \sum_{s'=0}^{\infty} \int d\Omega \frac{2k_0^2 + k_3^2 (1 + \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)^2} I_{0s'}^2 \left(\frac{k_3^2}{4\gamma} \sin^2 \theta\right). \quad (7)$$

Это выражение совпадает с формулой для рассеяния свободных частиц, отличаясь от последнего только «радиальным» множителем $I_{0,s'}^2$ (см. [1]). На это обстоятельство обратил внимание Танненвальд [3], рассмотревший рассеяние нерелятивистских электронов методом теории Шредингера. В частном случае переходов для круговых орбит, т. е. при $s'=0$, автор [3] получил

$$I_{00}^2(x) = e^{-x}, \quad (8)$$

откуда им был сделан вывод о том, что обрывающая экспонента может существенно сказаться на максимальной величине передаваемого импульса. Действительно, как это следует из (7) и (8), вероятность рассеяния резко убывает при $\frac{k_3^2}{4\gamma} \sin^2 \theta \sim 1$. Полагая $\sin \theta \sim 1$, для максимального передаваемого импульса Танненвальд получил оценку

$$p_{3\max} = \frac{\hbar m \Omega}{p_3},$$

где

$$p_3 = \hbar k_3, \quad \Omega = \frac{e_0 H}{mc}.$$

Рассматривая всевозможные конечные состояния, мы должны просуммировать (7) по радиальному числу s' . Тогда, поскольку

$$\sum_{s'} I_{s',0}^2(x) = 1,$$

(см. [1]), находим, что полное изменение импульса при рассеянии не будет отличаться от случая рассеяния свободных частиц. Эта ситуация несколько напоминает дискуссию по поводу квантовых поправок к интенсивности синхротронного излучения [7, 8], когда Парзен [8], учитывая только переходы между круговыми орбитами ($s'=0$), пришел к ошибочному выводу об уменьшении интенсивности излучения по экспоненциальному закону.

Выражаю признательность проф. И. М. Тернову за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., Физматгиз, 1958.
2. Багров В. Г., Дорофеев О. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 97, 1966.
3. Tannenwald L. M. Phys. Rev., 113, 1396, 1959.
4. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, 153, 1052, 1963.
5. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А. «Изв. вузов», физика, № 2, 111, 1966.
6. Соколов А. А., Колесникова М. М. ЖЭТФ, 38, 165, 1960; 1778, 1960.
7. Соколов А. А., Клепиков Н. П., Тернов И. М. ЖЭТФ, 23, 632, 1952.
8. Parzen G. Phys. Rev., 84, 235, 1951.

Поступила в редакцию
1. 6 1966 г.

Кафедра
общей и химической физики