Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1967

УДК 621.372.061

Г. А. БЕНДРИКОВ, Ф. Б. КОНЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Даны основные свойства траекторий корней линейных систем с запаздыванием, уравнения траекторий и формулы свободного параметра, позволяющие построить (геометрически и аналитически) траектории корней и вычислить в любой точке траекторий значение свободного параметра. Рассмотрены примеры, показывающие, как по основным свойствам траекторий систем различных классов определить области устойчивости, изменение величины и характер степени устойчивости, критические значения частоты и свободного параметра, определить переходные процессы в системе.

Широко распространенные методы исследования линейных систем с «чистым» запаздыванием — частотный метод Я. З. Цыпкина [2] и метод D-разбиений Ю. И. Неймарка [3] — являются методами исследования устойчивости. Существующие методы анализа систем с запаздыванием внутри области устойчивости достаточно сложны.

В данной работе для исследования линейных систем с запаздыванием применяется метод траекторий корней характеристического уравнения [4—6]. Этот метод основан на изучении законов движения корней характеристического уравнения по комплексной плоскости при непрерывном изменении линейно входящего в это уравнение параметра. Метод траекторий корней дает возможность рассмотреть динамические свойства активных линейных систем в области устойчивости.

Характеристическое уравнение большого числа линейных (или линеаризованных) систем с запаздыванием можно привести к виду

$$\Phi_n(p) + k\Psi_m(p)\,e^{-p\tau} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы от p $(p=\delta+i\omega)$ с действительными коэффициентами целых степеней n и m соответственно, причем $n \geqslant m$; τ — время запаздывания; k — параметр системы, принимающий любые действительные значения.

Обычно параметр k в уравнении (1) представляет собой полный коэффициент усиления разомкнутой системы. В этом случае его положительные значения $(k>0)$ соответствуют отрицательному знаку обратной связи в системе, а отрицательные значения $(k<0)$ — положительной обратной связи.

Уравнение (1) трансцендентное и имеет для любого фиксированного значения параметра k бесконечное число корней. При непрерыв-

ном изменении параметра k каждый корень перемещается по определенной траектории на p-плоскости.

Начальные ($k=0$) и предельные ($k\to\pm\infty$) точки траекторий, определяемые соответственно уравнениями

$$\Phi_n(p)=0 \tag{2}$$

и

$$\Psi_m(p)=0, \tag{3}$$

будем называть основными точками.

Значениям свободного параметра $k=0$ и $k\to\pm\infty$ соответствует также бесконечное число начальных и предельных точек, расположенных на p-плоскости в бесконечности, причем начальные точки лежат слева от мнимой оси, а предельные — справа.

Конфигурация траекторий корней характеристического уравнения (1) полностью определяется взаимным расположением основных точек и величиной времени запаздывания и не зависит от положения мнимой оси. Поэтому будем различать системы при заданном по τ числу основных (начальных и предельных) точек, называя их системами класса $[n, m]$.

Свойства линейных систем с запаздыванием ($\tau=\text{const}$) определяются физическими свойствами предельных систем ($\tau=0$), описываемых уравнениями

$$\Phi_n(p)+k\Psi_m(p)=0. \tag{4}$$

Рассмотрим геометрическое представление траекторий корней и свободного параметра уравнения (1). Обозначим корни уравнения (2) p_ν ($\nu=1, 2, 3, \ldots, n$), и корни уравнения (3) — z_μ ($\mu=1, 2, 3, \ldots, m$). Подставив в уравнение (1) координаты любой точки $p^*=\delta^*+i\omega^*$, принадлежащей траекториям корней, получим тождественное равенство

$$\prod_{\nu=1}^{n}(p^*-p_\nu)+ke^{-p^*\tau}\prod_{\mu=1}^{m}(p^*-z_\mu)=0. \tag{5}$$

Каждая из разностей (p^*-p_ν) и (p^*-z_μ) представляет собой вектор на комплексной плоскости, поэтому

$$p^*-p_\nu=|p^*-p_\nu|\,e^{i\varphi_\nu},\quad p^*-z_\mu=|p^*-z_\mu|\,e^{i\psi_\mu}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая, что k принимает только действительные значения, получим основное фазовое уравнение траекторий

$$\omega^*\tau+\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu-\sum_{\mu=1}^{m}\psi_\mu=N\pi,\qquad (N=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots) \tag{7}$$

и формулу параметра

$$k=(-1)^{N+1}e^{\delta^*\tau}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}|p^*-p_\nu|}{\prod\limits_{\mu=1}^{m}|p^*-z_\mu|},\qquad (N=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots). \tag{8}$$

Формула (7) дает возможность геометрического построения траекторий корней. Те и только те точки комплексной плоскости p^* лежат на траекториях корней уравнения (1), для которых сумма углов φ_ν, образованных векторами $\overline{(p^*-p_\nu)}$, проведенными из начальных точек

в исследуемую точку p^*, с положительным направлением действительной оси, минус сумма углов ψ_μ, образованных аналогичными векторами $(\overline{p^*-z_\mu})$, проведенными из предельных точек, и плюс добавочная фаза $\omega^*\tau$, равна целому кратному π.

Формула (8) показывает, что значение параметра k, соответствующего любой точке траекторий корней p^*, равно произведению длин n векторов, соединяющих все начальные точки p_ν с корнем p^*, деленному на произведение длин m векторов, соединяющих предельные точки z_μ с этим корнем, и умноженному на $e^{\delta^*\tau}$. Знак k определяется значением N, т. е. тем, на какой траектории лежит корень p^*. Четные значения N соответствуют случаю $\kappa<0$ (положительной обратной связи), а нечетные значения $N-k>0$ (отрицательной обратной связи). Траектории, соответствующие четным (нечетным) N, будем называть четными (нечетными).

Основное фазовое уравнение (7) позволяет выяснить все важнейшие геометрические свойства траекторий корней [6] уравнения (1).

Для систем класса [0, 0] (замкнутая система с запаздывающим звеном и усилителем с бесконечной полосой пропускания) уравнение (7) принимает вид

$$\omega\tau = \pi N, \qquad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{9}$$

т. е. траектории корней представляют собой бесконечное число горизонтальных линий.

Из уравнения (9) и формулы свободного параметра $k=(-1)^{N+1}\, e^{\delta\tau}$ следует, что все корни, находясь слева от мнимой оси при $k=0$, при увеличении $|k|$ от нуля двигаются слева направо, одновременно все при $|k|=1$ пересекают мнимую ось и уходят при $k\to\pm\infty$ в бесконечность вправо от оси $i\omega$.

Для траекторий корней систем классов $[n, m]$ прямые (9) являются асимптотами. Существование горизонтальных асимптот является основным отличием траекторий корней систем с запаздыванием от траекторий предельных систем.

Действительная ось всегда принадлежит траекториям корней уравнения (1), и ее разбиение на четные и нечетные траектории основными точками производится так же, как и в случае предельных систем.

Геометрические свойства траекторий корней систем с запаздыванием позволяют сравнительно просто, без сложных расчетов, получить приближенную картину траекторий и с ее помощью качественно исследовать систему.

Для точного построения траекторий корней может быть применен аналитический способ. Если в полиномах $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ выделить действительные и мнимые части, приняв следующие обозначения:

$$\Phi_n(p) = \Phi_r + i\omega\Phi_j, \quad \Psi_m(p) = \Psi_r + i\omega\Psi_j, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_r &= \Phi_n(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}\Phi_n''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!}\Phi_n^{\mathrm{IV}}(p) - \ldots,\\
\Phi_j &= \Phi_n'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}\Phi_n'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!}\Phi_n^{\mathrm{V}}(p) - \ldots,\\
\Psi_r &= \Psi_m(\delta) - \frac{\omega^2}{2!}\Psi_m''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!}\Psi_m^{\mathrm{IV}}(p) - \ldots,\\
\Psi_j &= \Psi_m'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!}\Psi_m'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!}\Psi_m^{\mathrm{V}}(p) - \ldots,
\end{aligned} \tag{11}$$

то уравнение траекторий представляется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \omega\tau = \omega \frac{\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r}{\Phi_r\Psi_r + \omega^2\Phi_j\Psi_j}. \tag{12}$$

Формула для нахождения значения параметра, соответствующего любому данному корню, имеет вид

$$k^2 = \frac{\Phi_r^2 + \omega^2\Phi_j^2}{\Psi_r^2 + \omega^2\Psi_j^2} e^{2\delta\tau}. \tag{13}$$

Критические значения частоты и параметра, соответствующие выходу корней на мнимую ось, определяются из выражений (12) и (13), если положить в них $\delta=0$.

При применении вычислительных машин уравнение (12) можно записать в виде полинома относительно δ согласно (11) и использовать стандартные программы для решения алгебраических уравнений.

Следует отметить, что кривые, построенные по уравнению (13) для различных фиксированных значений параметра $|k|$ (линии равного значения параметра, или линии равного усиления), всегда ортогональны траекториям корней, так как уравнение траекторий (12) и формула параметра (13) представляют собой преобразованные действительную и мнимую части характеристического квазиполинома (1), являющегося функцией аналитической.

Известно [7, 8], что переходные процессы в системах с запаздыванием можно определить по неасимптотическим корням характеристического уравнения (1), т. е. по корням, ближайшим к началу координат p-плоскости и имеющим наибольшие действительные части. Уравнение (1) может иметь лишь конечное число таких корней. Асимптотические корни, отбрасываемые при построении переходного процесса, оказывают влияние на переходной процесс лишь в самый начальный период процесса. Оценка влияния неучитываемых корней может быть произведена по соответствующим формулам (см. [7]).

Таким образом, по характеру нескольких ветвей траекторий, ближайших к началу координат, можно судить о динамических свойствах системы с запаздыванием внутри области устойчивости и об изменении этих свойств при изменении параметра.

Рассмотрим примеры, показывающие, как по основным свойствам траекторий корней систем различных классов определить области устойчивости, критические значения частоты и свободного параметра и пр.

Замкнутая система, состоящая из усилителя и фильтра нижних частот в виде n одинаковых инерционных звеньев первого порядка, при наличии запаздывания описывается характеристическим уравнением

$$(p+\alpha)^n + ke^{-p\tau} = 0, \ \alpha > 0. \tag{14}$$

Траектории корней уравнения (14) имеют кратную основную начальную точку $p=-\alpha$. По нашей классификации система с характеристическим уравнением (14) принадлежит классу $[n, 0]$.

На рис. 1 сплошными линиями изображены ближайшие к началу координат ветви траекторий корней уравнения (14) для случая $n=5$, $\alpha=1$, $\tau=3$. Направление движения корней с ростом $|k|$ по четным ($k<0$) траекториям показано двойными стрелками, по нечетным ($k>0$) — одинарными. Траектории, соответствующие значениям $N=0, 1, 2, \ldots$ в основном фазовом уравнении (7), обозначены на рисунке $0, \pi, 2\pi, \ldots$ соответственно.

При выходе из n-кратной начальной точки $p=-\alpha$ ветви траекторий образуют правильную $2n$-лучевую «звезду», состоящую из чередующихся четных и нечетных траекторий. Справа от начальной точки действительная ось в соответствии с основным фазовым уравнением (7) является траекторией 0, слева — траекторией πn.

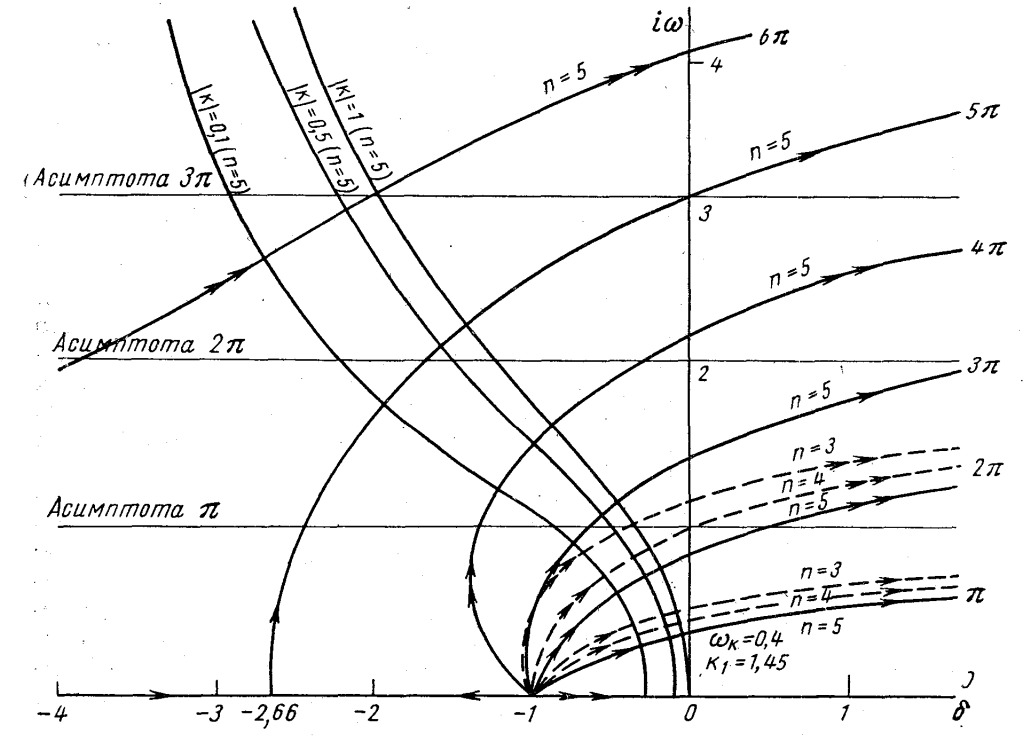

Рис. 1

Корень, идущий с ростом $|k|$ из начальной точки влево по действительной оси, встречается с корнем, идущим по действительной оси слева направо из бесконечности, в кратной точке $p=-2{,}66$. Кратные точки являются действительными корнями уравнения

$$\tau\Phi_n(p)\Psi_m(p)+\Phi_n'(p)\Psi_m(p)-\Phi_n(p)\Psi_m'(p)=0, \tag{15}$$

которое в данном случае имеет вид

$$(p+\alpha)^{n-1}[\tau(p+\alpha)+n]=0. \tag{16}$$

Каждая из ветвей траекторий стремится к «своей» горизонтальной асимптоте, определяемой уравнением (9). Положение асимптот на p-плоскости зависит только от величины времени запаздывания τ.

На рис. 1 нанесено несколько линий равных значений свободного параметра для системы класса [5, 0]. Эти линии ортогональны ветвям траекторий. Пересечения линий равного $|k|$ с траекториями дают значения корней характеристического уравнения, соответствующих данному значению параметра $|k|$. Необходимо помнить, что на нечетных траекториях значение параметра положительно, на четных — отрицательно.

Из рисунка видно, что точки пересечений траекторий с линиями равных значений параметра удаляются от мнимой оси. Действительно, с увеличением номера траектории N затухание корней δ значительно увеличивается (см. таблицу).

	$k=-0{,}1$			$k=0{,}1$		
N	0	2	4	1	3	5
$\lvert\delta\rvert$	0,17	0,46	1,22	0,31	0,75	1,96

Отсюда следует, что степень устойчивости системы при фиксированном значении $|k|$ определяется корнями, лежащими на траекториях 0 или π (в зависимости от знака обратной связи). При $|k|=0{,}1$ при положительной обратной связи степень устойчивости (апериодическая) равна $|\delta|=0{,}17$, а при отрицательной обратной связи (колебательная степень устойчивости) — $|\delta|=0{,}31$.

Из расположения корней на траекториях для заданного $|k|$ следует, что переходный процесс определяется только корнями, ближайшими к началу координат.

Рост затухания корней δ с номером N траекторий, которым принадлежат корни, является следствием того, что предельная разомкнутая система представляет собой фильтр нижних частот.

С ростом параметра $|k|$ от нуля корни перемещаются по траекториям, приближаясь к мнимой оси. Степень устойчивости системы при этом уменьшается и становится равной нулю при критическом значении параметра, когда система выходит на границу устойчивости.

В случае положительной обратной связи ($k<0$, четные траектории) при возрастании коэффициента усиления $|k|$ система будет возбуждаться апериодически при $k=-1$, что соответствует выходу в правую полуплоскость через начало координат одного действительного корня. Комплексно-сопряженная пара корней, лежащая на траектории 2π, приходит на мнимую ось при значительно большем значении параметра $|k|$ ($k=-4{,}185$).

В случае отрицательной обратной связи ($k>0$, нечетные траектории) система возбуждается на частоте $\omega=0{,}4$ при $k=1{,}45$, что соответствует выходу на мнимую ось пары комплексно-сопряженных корней, лежащих на траектории π. Корни, лежащие на траектории 3π, выходят на мнимую ось при большем значении коэффициента усиления, равном $k=18{,}62$.

На рис. 1 пунктирными линиями изображены первые две ветви траекторий (по одной для каждого знака обратной связи) для случаев $n=3$ и $n=4$ при одном и том же времени запаздывания. Сравнение траекторий корней систем класса $[n, 0]$ для различных значений n показывает, что основные свойства этих систем одинаковы. Действительно, траектории корней систем этого класса независимо от порядка системы n стремятся к одним и тем же горизонтальным асимптотам, определяемым только временем запаздывания. С ростом параметра $|k|$ системы этого класса возбуждаются апериодически при положительной обратной связи и колебательно — на низшей из возможных частот — при отрицательной обратной связи.

Рассмотрим теперь систему с тем же запаздыванием, но состоящую из последовательно включенных различных звеньев первого порядка.

На рис. 2 изображены траектории корней системы класса [5, 0], характеристическое уравнение которой имеет вид

$$p(p+0{,}1)(p+0{,}5)(p+1)(p+2)+ke^{-3p}=0. \qquad (17)$$

В этом случае действительная ось разбивается основными точками на шесть четных и нечетных траекторий, обозначенных соответственно двойными и одинарными стрелками. По этим траекториям ($\omega=0$) с ростом $|k|$ от нуля корни идут навстречу друг другу и образуют двойные точки: при $k>0$ $\delta_1=-0{,}04$; $\delta_3=-0{,}72$; $\delta_5=-2{,}79$ и при $k<0$ $\delta_2=-0{,}28$; $\delta_4=-1{,}44$. Двойная точка $\delta_5=-2{,}79$ образуется при встрече корня, выходящего из начальной точки $p=-2$, и корня, идущего из бесконечности по действительной оси слева направо. При дальнейшем возрастании $|k|$ корни выходят на плоскость и двигаются по комплексным ветвям траекторий $\pi \div 5\pi$. Все другие четные и нечетные траектории идут из $-\infty$ к соответствующим горизонтальным асимптотам.

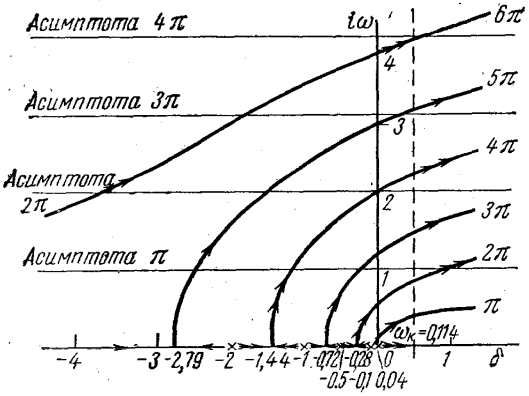

Рис. 2

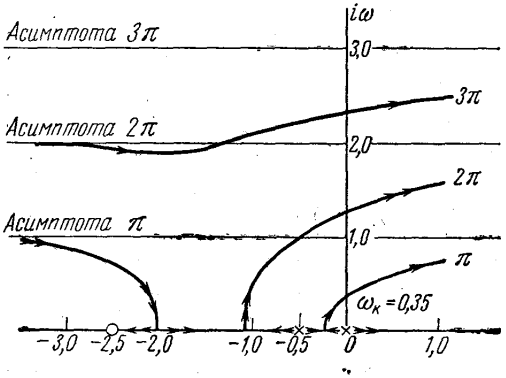

Рис. 3

Из ортогональности линии равных значений параметра к траекториям следует, что затухание колебаний, соответствующих корням, лежащим на траекториях 2π, 3π и т. д., достаточно велико по сравнению с затуханием колебаний, определяемых корнями траекторий 0 и π. Поэтому динамические свойства системы определяются в основном корнями, ближайшими к мнимой оси.

Из рассмотрения траекторий (рис. 2) следует, что система при положительной обратной связи при любом $k<0$ становится апериодически неустойчивой. При отрицательной обратной связи с увеличением k степень устойчивости системы увеличивается от нуля и становится максимальной при $k_0=0{,}0017$, что соответствует двукратной точке $\delta_1=-0{,}04$. При дальнейшем увеличении k степень устойчивости (колебательная) уменьшается, и при $k_k=0{,}0324$ система приходит на границу устойчивости ($\omega_k=0{,}114$).

Выше было указано, что общий вид траекторий не зависит от положения мнимой оси. Поэтому можно, перемещая мнимую ось, судить о свойствах целого класса систем с данным относительным расположением основных точек. Например, переместим на рис. 2 мнимую ось на $\delta=0{,}5$ вправо. Тогда эти траектории будут соответствовать новой системе с характеристическим уравнением

$$(p+0{,}5)(p+0{,}6)(p+1)(p+1{,}5)(p+2{,}5)+k_1e^{-3p}=0, \qquad (18)$$

где $k_1 = ke^{-1,5}$. При отрицательной обратной связи свойства этой системы аналогичны свойствам системы, рассмотренной выше. В случае положительной обратной связи такая система, в отличие от предыдущей, имеет область устойчивости.

К рассмотренному классу $[n, 0]$ систем с запаздыванием относится большое число конкретных систем. В частности, системы регулирования давления при учете запаздывания в работе исполнительного механизма [2] принадлежат по нашей классификации классу [1, 0]; один из типов ламповых генераторов при наличии запаздывания [9] является системой класса [2, 0]; классическая линеаризованная система прямого регулирования при учете запаздывания в объекте регулирования или в регуляторе [10] принадлежит классу [3, 0] и т. д. Предлагаемая классификация систем с запаздыванием дает возможность одновременно рассмотреть общие свойства многих конкретных систем, относящихся к одному и тому же классу.

Аналогично могут быть исследованы системы классов $[n, m]$. В качестве примера рассмотрим систему, принадлежащую классу [2, 1], характеристическое уравнение которой представляется следующим образом:

$$p(p+\alpha) + k(p+\beta)e^{-p\tau} = 0, \ (\alpha > 0, \ \beta > 0). \tag{19}$$

Такое характеристическое уравнение имеет, например, система регулирования давления [11] при учете запаздывания.

Очевидно, что возможны два случая $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$. Мы ограничимся рассмотрением только первого случая, который соответствует предельной разомкнутой системе в виде фильтра нижних частот.

Основными точками траекторий корней уравнения (19) являются начальные точки $p=0$ и $p=-\alpha$ и предельная точка $z=-\beta$. На рис. 3 показаны траектории ближайших к началу координат корней уравнения (19) $\alpha=0,5$; $\beta=2$; $\tau=3,14$. Для построения траекторий было использовано уравнение (12), которое в этом случае имеет вид

$$\operatorname{tg} \omega\tau = -\omega \frac{\omega^2 + \delta^2 + 2\delta\beta + \alpha\beta}{(\delta + \alpha - \beta)\omega^2 + \delta^3 + (\alpha+\beta)\delta^2 - \alpha\beta\delta}. \tag{20}$$

Критические ($\delta=0$) значения частот и коэффициента усиления определяются из уравнений

$$\operatorname{tg} \omega_k \tau = \frac{\omega_k^2 + \alpha\beta}{(\beta - \alpha)\omega_k} \tag{21}$$

и

$$k_k = \pm \omega_k \sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega_k^2}{\beta^2 + \omega_k^2}}. \tag{22}$$

Рассматриваемая система достигает максимальной степени устойчивости в случае отрицательной обратной связи при $k_0=0,0136$, когда в точке $\delta=-0,22$ встречаются два корня, идущие навстречу друг другу по действительной оси из начальных точек $p=0$ и $p=-0,5$.

При отрицательной обратной связи $|k>0|$ первым с ростом k на мнимую ось выходит корень, соответствующий траектории π при $k_k = 0,085$. При этом в системе возможны незатухающие колебания частоты $\omega_k=0,35$. В случае положительной обратной связи система неустойчива при любом $k<0$.

В заключение авторы приносят благодарность проф. К. Ф. Теодорчику за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. Применение метода траекторий корней к исследованию линейных систем с запаздыванием. Тезисы докладов на Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновицы, 1965.
2. Цыпкин Я. З. «Автоматика и телемеханика», **7**, № 2—3, 1946.
3. Неймарк Ю. И. «Автоматика и телемеханика», **9**, № 3, 1948.
4. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. «Наука», 1964.
5. Chu Y. Trans. AIEE, **71**, 2, 291—296, 1952.
6. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике), 1965 г., Одесса, т. 1, изд. АН СССР, 1967.
7. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные управления. М., ИЛ, 1961.
8. Кисляков В. С. «Автоматика и телемеханика», **22**, № 12, 1961.
9. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. ОГИЗ, 1953.
10. Мясников Н. Н. «Изв. АН СССР», № 9, 1217, 1953.
11. Oppelt W. Luftfahrtforschung, **16**, Nr. 8, 1447, 1939.

Поступила в редакцию
2. 6 1966 г.

Кафедра
физики колебаний