Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1967

Ю. М. НИКОЛАЕВ

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАЗВИТИЕ ТЭЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМЫХ ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ

Исследуется влияние магнитного поля на развитие гравитационной неустойчивости границы раздела двух сжимаемых идеально проводящих жидкостей. Полученное характеристическое уравнение позволяет определить зависимость роста амплитуды возмущений нестационарной задачи от физических параметров среды. Показано, что магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние, т. е. рост возмущений происходит заметно медленнее, чем при отсутствии магнитного поля.

Результаты сравниваются с результатами Чандрасекхара [1] и Талвара [2].

§ 1. Постановка задачи

Система, состоящая из двух идеально проводящих сжимаемых жидкостей бесконечной протяженности с распределением плотностей

$$\rho_1 = \rho_1(z),\ z > 0;\ \rho_2 = \rho_2(z),\ z < 0,$$

находится в поле тяжести, ускорение которого постоянно в пространстве и времени и направлено вниз по вертикали $g_z = -g$.

На систему наложено однородное магнитное поле вдоль оси O_x. Задача решается в следующих приближениях.

Начальное состояние обоих сред считаем изэнтропическим

$$p_1 = p_{01}\left(\frac{\rho_1(z)}{\rho_{01}}\right)^{n_1},\quad p_2 = p_{02}\left(\frac{\rho_2(z)}{\rho_{02}}\right)^{n_2}, \tag{1}$$

где p, ρ, n — давления, плотности и показатели изэнтропы для первой (тяжелой) и второй (легкой) сред.

Идеально проводящая плазма электрически нейтральна.

Токами смещения в плазме полностью пренебрегаем.

Плазма не вязка и не теплопроводна.

В силу независимости исходных величин задачи от координаты x зависимость возмущенных величин в направлении Ox предполагается экспоненциальной, т. е. $\partial/\partial x \sim k$.

Не ограничивая общности рассуждений, магнитную проницаемость каждой среды полагаем равной единице, а все интересующие нас величины будем считать не зависящими от координат y, т. е. полагать

$\partial/\partial y=0$. Уравнения магнитной гидродинамики, записанные через скорость среды u, плотность ρ и магнитное поле H, с учетом изэнтропичности процессов

$$dp = c^2 d\rho$$

имеют вид

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u}\nabla) \vec{u} + c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho - \frac{1}{4\pi} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} \cdot \vec{H} - \rho \vec{g} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0, \ \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}} [\vec{u}\vec{H}] = 0.$$

Сформулируем граничные условия. На границе раздела давление и нормальные составляющие магнитного поля должны быть равны, а нормальные составляющие скорости частиц среды должны быть равны нормальной скорости перемещения элемента границы.

Положим, что в системе возникли возмущения. Считая возмущения физических величин $\vec{u}'$, ρ', $\vec{h}$, входящих в уравнения (2), малыми по сравнению с их невозмущенными значениями в статическом случае, когда система покоится, получим

$$c^2 \frac{d\rho}{dz} + g\rho = 0.$$

Линеаризируем систему исходных уравнений. После линеаризации система уравнений (2) возмущенного движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho' - \frac{1}{4\pi} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{h}\vec{H} - \rho' \vec{g} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{u}' + \vec{u}' \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0, \ \rho = \rho_0 \exp\left(-\int \frac{g}{c^2} dz\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}} [\vec{u}'\vec{H}] = 0, \ \operatorname{div} \vec{h} = 0.$$

Здесь ρ — распределение плотности, ρ_0 — значение плотности на границе раздела.

Вывод граничных условий при наличии возмущения. Если функция $a(x, t)$ есть смещение границы раздела вдоль оси Oz, то в линейном приближении величина $\partial a/\partial t$ характеризует нормальные составляющие граничной скорости частиц в тяжелой и легкой средах, т. е.

$$\frac{\partial a}{\partial t} = u'_{z1}, \ \frac{\partial a}{\partial t} = u'_{z2}, \ z = 0. \tag{4}$$

Учитывая изэнтропичность процессов, имеем взаимно однозначную связь между давлением и плотностью. Граничное условие для давления имеет вид

$$\frac{H_1^2}{8\pi} + p_1 [\rho_1 (x, a, t] = \frac{H_2^2}{8\pi} + p_2 [\rho_2 (x, a, t]. \tag{5}$$

Линейное разложение величин p и $\frac{H^2}{8\pi}$, входящих в выражение (5) по степеням амплитуды, позволяет записать (5) в виде

$$-g(\rho_{01}-\rho_{02})\,a(x,t)+c_{01}^2\rho_1'(x,0,t)+\frac{H}{4\pi}h_{x1}(x,0,t)=$$

$$=c_{02}^2\rho_{02}'(x,0,t)+\frac{H}{4\pi}h_{x2}(x,0,t), \tag{6}$$

где h_x — возмущение магнитного поля.

Поскольку нормальные составляющие возмущенного значения магнитного поля h_{z1} и h_{z2} входят в граничные условия квадратичным образом, ими пренебрегаем. Итак, задача свелась к нахождению решения системы уравнений (3) возмущенного движения в обоих средах с их граничными условиями (4) и (6). С учетом приближений будем считать, что возмущения исчезают при $|z|=z_0=\frac{c_0^2}{(n-1)g}$.

§ 2. Решение задачи

Запишем систему уравнений (3) в компонентах, при этом будем учитывать, что $\frac{\partial}{\partial x}\sim ik$, $\frac{\partial}{\partial y}=0$; u' запишем без штриха. Тогда получим

$$\rho\frac{\partial u_x}{\partial t}+ikc^2\rho'=0,\quad \frac{\partial\rho'}{\partial t}+ik\rho u_x+\rho\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial z}u_z=0,$$
$$\rho\frac{\partial u_y}{\partial t}-ik\frac{H}{4\pi}h_y=0,\quad \frac{\partial h_y}{\partial t}-ikHu_y=0. \tag{7}$$

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}+\frac{H}{4\pi}\left(\frac{\partial h_x}{\partial z}-ikh_z\right)+c^2\frac{\partial\rho'}{\partial z}+\rho'g=0,$$
$$\frac{\partial h_z}{\partial t}-ikHu_z=0,\quad \frac{\partial h_x}{\partial t}+H\frac{\partial u_z}{\partial z}=0. \tag{7'}$$

Зависимость возмущенных значений u, ρ', h от времени можем считать экспоненциальной.

С учетом последнего замечания из системы (7) следует

$$(\omega^2+k^2v_a^2)\,u_y=0,$$

где через v_a обозначена скорость распространения альфвеновской волны [1]

$$v_0^2=v_0^2\exp\int\frac{g}{c^2}\,dz, \tag{8}$$

$$v_0^2=\frac{H^2}{4\pi\rho_0}.$$

Из системы уравнений (7) непосредственно следует

$$u_x=\frac{ikc^2}{\omega^2+k^2c^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{g}{c^2}u_z\right).$$

Система уравнений (7′) позволяет получить уравнение для компонента скорости вдоль оси Oz:

$$(v_a^2 + c^2)\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - g\frac{\partial u_z}{\partial z} - \left(k^2 v_a^2 + \omega^2 - \frac{g}{c^2}\frac{\partial c^2}{\partial z}\right)u_z +$$

$$+ ikc^2\frac{\partial u_x}{\partial z} - ikgu_x = 0.$$

При этом было учтено, что

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{g}{c^2}\left(g + \frac{\partial c^2}{\partial z}\right).$$

Заметим, что зависимость $c^2(z)$ и $v_a^2(z)$ определяется из статического случая:

$$c^2 = c_0^2[1 + (1-n)\alpha kz],\ v_a^2 = v_0^2[1 + (1-n)\alpha kz]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{g}{kc_0^2},\ \alpha_H = \frac{g}{kv_0^2},\ \varepsilon = \frac{\omega^2}{kg} \tag{10}$$

и новые переменные

$$U(\xi) = u_z(z),\ \xi = 1 + (1-n)\alpha kz. \tag{11}$$

Подставляя значение u_x в уравнение для u_z в новых переменных получаем

$$(1-n)^2\alpha^2\left(\varepsilon + \frac{\xi}{\alpha}\right)\left[\frac{1}{\alpha_H}\left(\varepsilon + \frac{\xi}{\alpha}\right)\xi^{\frac{1}{1-n}} + \frac{\varepsilon}{\alpha}\xi\right]U'' -$$

$$-(1-n)\alpha\left[\varepsilon^2 - \frac{\xi^2}{\alpha^2} + (1-n)\frac{\varepsilon}{\alpha}\xi\right]U' +$$

$$+\left\{(1-n)\left(\varepsilon + \frac{\xi}{\alpha}\right) + \frac{(1-n)\alpha}{\xi}\left[\left(\varepsilon + \frac{\xi}{\alpha}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\alpha}\xi\right] -\right.$$

$$\left.-\left(\varepsilon + \frac{\xi}{\alpha}\right)\left[\left(\frac{\xi^{\frac{1}{1-n}}}{\alpha_H} + \varepsilon\right)\left(\varepsilon + \frac{\xi}{\alpha}\right) + 1\right]\right\}U = 0. \tag{12}$$

Таким образом, решение задачи будет получено, если определим скорость $U(\xi)$ возмущенного движения в направлении Oz в каждой среде. Аналитическое решение его можно получить лишь для определенных предельных случаев. Прежде чем их исследовать, получим характеристическое уравнение. Величины $a(x,t)$, $h_x(x,\xi,t)$, $\rho'(x,\xi,t)$ выражаются через скорость $U(\xi)$. Производя необходимые преобразования, для каждой среды на границе раздела имеем $z=0$, $\xi_1=1$, $\xi_2=1$. Первая среда (тяжелая плазма)

$$a = \frac{1}{\omega}U_1(\xi_1), \qquad h_{x1} = -\frac{H}{\omega}\frac{\partial U_1(\xi_1)}{\partial z},$$

$$\rho_1' = \frac{\rho_{01}\omega}{\omega^2 + k^2c_{01}^2}\left[\frac{g}{c_{01}^2}U_1(\xi_1) - \frac{\partial U_1(\xi_1)}{\partial z}\right],$$

Вторая среда (легкая плазма)

$$a = \frac{1}{\omega} U_2(\xi_2), \qquad h_{x2} = -\frac{H}{\omega} \frac{\partial U_2(\xi_2)}{\partial z},$$

$$\rho_2' = \frac{\rho_{02}\omega}{\omega^2 + k^2 c_{02}^2} \left[\frac{g}{c_{02}^2} U_2(\xi_2) - \frac{\partial U_2(\xi_2)}{\partial z} \right].$$

Решение основного уравнения (12) для каждой среды можно записать в виде

$$U_1(\xi_1) = A_1 U_1^{(')}(\xi_1), \quad U_2(\xi_2) = A_2 U_2^{(')}(\xi_2).$$

Из граничных условий следует характеристическое уравнение. После необходимых преобразований в новых обозначениях получаем

$$(1-\mu) - \frac{\alpha_2\varepsilon}{\alpha_2\varepsilon + 1} + \mu \frac{\alpha_1\varepsilon}{\alpha_1\varepsilon + 1} + \frac{1}{k}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha_2\varepsilon + 1} + \frac{1}{\alpha_{H2}}\right)\left(\frac{1}{U_2^{(')}(\xi_2)} \frac{\partial U_2^{(')}(\xi_2)}{\partial z}\right)_{\xi_2=1} =$$

$$= -\frac{1}{k}\left(\frac{\mu\varepsilon}{\alpha_1\varepsilon + 1} + \frac{1}{\alpha_{H1}}\right)\left(\frac{1}{U_1^{(')}(\xi_1)} \frac{\partial U_1^{(')}(\xi_1)}{\partial z}\right)_{\xi_1=1} = 0, \quad \mu = \frac{\rho_{01}}{\rho_{02}}. \qquad (13)$$

Развитие коротковолновых возмущений. Под этим термином понимаются такие возмущения границы, длина волны, которых мала по сравнению с характерной длиной $L_0 = \frac{c_0^2}{g}$, в пределах которой скорость звука существенно не меняется. Аналогично вводим второй параметр $L_H = \frac{v_0^2}{g}$ — длину, в пределах которой скорость альфвеновской волны постоянна.

Итак:

$$\alpha = \frac{\lambda}{L_0} \ll 1, \quad \alpha_H = \frac{\lambda}{L_H} \ll 1.$$

Физически этот предельный случай соответствует распространению волн в слабо сжимаемых средах, где α и α_H характеризуют величину газодинамической и магнитной сжимаемостей проводящей жидкости. Считая члены, содержащие величины α^2 и α_H^2 в основном уравнении (12) малыми, в линейном приближении получаем

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{\alpha_H}{(n-1)\alpha} \xi^{\frac{2-n}{n-1}} \left\{ 1 + \alpha\varepsilon \left[(n-1)\xi - \frac{2}{\xi} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\alpha_H}{\alpha} \xi^{\frac{1}{n-1}} \right] \right\} \frac{dU}{d\xi} - \frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} U = 0.$$

Удобно привести это уравнение к нормальному виду [6]:

$$U(\xi) = y(\xi) \exp\left[-\frac{1}{2} \int \xi^{\frac{2-n}{n-1}} \left\{ 1 + \alpha\varepsilon \left[(n-1)\xi - \frac{2}{\xi} - \frac{\alpha_H}{\alpha} \xi^{\frac{1}{n-1}} \right] \right\} d\xi \right].$$

Уравнение для $y(\xi)$ в приближении второго порядка малости имеет вид

$$y'' - \frac{1}{(n-1)^2\alpha^2} \left[1 + \frac{1}{4} \alpha_H^2 \xi^{\frac{2}{n-1}} \left(1 + 2\frac{\alpha_H}{\alpha} \xi^{\frac{n}{n-1}} \right) \right] y = 0.$$

В первом приближении получаем решение

$$y(\xi) = A_1 \exp \frac{\xi}{(n-1)\alpha} + A_2 \exp \frac{\xi}{(n-1)\alpha}.$$

Из условия $y(0) = 0$ получаем $A_2 = -A_1$

$$U(\xi) = Ae^{-\frac{1}{2n}\frac{\alpha_H}{\alpha}\xi^{\frac{1}{n-1}}} \operatorname{sh} \frac{\xi}{(n-1)\alpha}. \tag{14}$$

Решение на границе раздела и первая производная имеют вид

$$U_1^{(')}(\xi_1)\big|_{\xi_1=1} = e^{-\frac{1}{2n_1}\frac{\alpha_{H1}}{\alpha_1}} \operatorname{sh} \frac{1}{(n_1-1)\alpha_1}; \quad \frac{\partial U_1^{(')}(\xi_1)}{\partial z}\bigg|_{\xi_1=1} =$$

$$= -k\left[1 + \frac{1-n_1}{2n_1}\alpha_{H1}\right] U_1^{(')}(1),$$

$$U_2^{(')}(\xi_2)\big|_{\xi_2=1} = e^{\frac{1}{2n_2}\frac{\alpha_{H_2}}{\alpha_2}} \operatorname{sh} \frac{1}{(n_2-1)\alpha_2};$$

$$\frac{\partial U_2^{(')}(\xi_2)}{\partial z}\bigg|_{\xi_2=1} = k\left[1 - \frac{(1-n_2)}{2n_2}\alpha_{H2}\right] U_2^{(')}(1).$$

Характеристическое уравнение для случая коротких волн может быть разрешено относительно искомой ε. В нулевом приближении, когда пренебрегаем членами, содержащими α и α_H, получаем результат Талвара

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{\rho_{01} - \rho_{02}}{\rho_{01} + \rho_{02}} - k\frac{H^2}{2\pi g(\rho_{01} + \rho_{02})}. \tag{15}$$

При $H \neq 0$ при больших k, второй член будет преобладать независимо от соотношения плотностей и скоростей звука, т. е. волны малой длины начиная с $(k > k_H)$ (критического значения k) будут устойчивы. Это естественно, так как такие волны сильно искривляют силовые линии и вследствие вмороженности магнитного поля встречают большое противодействие. Неустойчивость наступает при длинах волн, для которых $k < k_H$, где k_H — критическое равно

$$k_H = \frac{2\pi(\rho_{01} - \rho_{02})g}{H^2}.$$

С другой стороны, $\omega^2 = 0$ при $k = 0$, т. е. неустойчивость исчезает. Поэтому между k_H и 0 должен быть максимум неустойчивости. Дифференцирование (15) показывает, что максимум имеет место при $k_m = \frac{k_H}{2}$, причем скорость роста возмущения при этом определяется величиной

$$\omega^2(k_m) = \frac{\rho_{01} - \rho_{02}}{\rho_{01} + \rho_{02}} k_m g. \tag{16}$$

Первое приближение позволяет определить поправку к значению $\varepsilon^{(0)}$:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{\varepsilon^{(0)}}{(\mu+1)}\left\{(\mu\alpha_1 + \alpha_2)\varepsilon^{(0)} + (\alpha_2 - \mu\alpha_1) - \frac{\mu}{2}\left[\frac{n_2-1}{n_2}\alpha_{H_2} + \frac{n_1-1}{n_1}\alpha_{H1}\right]\right\}. \tag{17}$$

Распространение длинных волн. Под длинными понимаем возмущения, длина волны которых заметно больше характерного масштаба изменения скорости звука и скорости альфвеновской волны, т. е. $\alpha \gg 1$, $\alpha_H \gg 1$.

Введем величины $\beta = 1|\alpha$, $\beta_H = 1|\alpha_H$. Разложение членов уравнения (12) по степеням β, β_H в линейном приближении определяет уравнение длинных волн:

$$\left(\xi^{\frac{n-2}{n-1}} + \varkappa\xi^2\right)\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{\varkappa}{(n-1)}\xi\frac{dU}{d\xi} - \frac{\varkappa}{(n-1)}U = 0,$$

где

$$\varkappa = \frac{\beta}{\beta_H} = \frac{c_0^2}{v_0^2}. \tag{18}$$

Уравнение (18) сравнительно просто решается для случая, когда показатель изэнтропы замагниченной плазмы равен двум. Общее исследование и построение решения этого уравнения безусловно интересно, но представляет значительные трудности и выходит за рамки данной статьи. Проанализируем развитие длинноволновых возмущений в частном случае, когда $n=2$.

Имеем

$$(1 + \varkappa\xi^2)U'' + \varkappa\xi U' - \varkappa U = 0.$$

Заменой переменных это уравнение может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами [3]. Решение уравнения записывается в виде

$$U(\xi) = A\sqrt{\varkappa}\xi, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Выражения для скоростей и их первые производные на границе раздела первой и второй среди имеют вид

$$U_1^{(')}(\xi_1)|_{\xi_1=1} = A_1\sqrt{\varkappa_1}, \quad \left.\frac{\partial U_1^{(')}(\xi_1)}{\partial z}\right|_{\xi_1=1} = -\frac{(1-n_1)k}{\beta_1}U_1^{(')}(1),$$

$$U_2^{(')}(\xi_2)|_{\xi_2=1} = A_2\sqrt{\varkappa_2}, \quad \left.\frac{\partial U_2^{(')}(\xi_2)}{\partial z}\right|_{\xi_2=1} = -\frac{(1-n_2)k}{\beta_2}U_2^{(')}(1).$$

Подставляем эти выражения в характеристическое уравнение (13). В нулевом приближении, пренебрегая величинами β, получим $\varepsilon^{(0)}=0$. В линейном приближении поправка $\varepsilon^{(1)}$ равна

$$\varepsilon^{(')} = \frac{\mu n_1\beta_1 - n_2\beta_2}{(n_1-1)(\mu+\varkappa_2\nu) + (n_2-1)(1+\varkappa_2)}, \quad \nu = \frac{c_{02}^2}{c_{01}^2}. \tag{19}$$

Определение частот собственных колебаний. Положим, что плотность второй среды очень велика, так что $\mu \ll 1$. Из выражения (15) и (17) определим значения собственных частот колебаний. Как известно, $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} = \frac{\omega'^2}{kg}$, где $\omega' = i\omega$ — значение частоты свободных колебаний слоя плазмы толщиной

$$L_1 = \frac{c_{01}^2}{g}.$$

Тогда получим

$$\omega'^2 = [kg + 2\mu (kv_{01})^2]\, 1 - 2\left(\frac{v_{02}}{c_{02}}\right)^2 \left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{2}\right) \alpha_{n1}.$$

Положим также, что скорость звука во второй среде велика, тогда имеем

$$\omega'^2 = [kg + 2\mu (kv_{01})^2]\left(1 - \frac{\alpha_{n1}}{2}\right).$$

Назовем такие колебания магнито-гравитационными. В предельном случае слабого магнитного поля имеем гравитационно-магнитные колебания:

$$\omega' = \pm \sqrt{kg}\left(1 + \mu \frac{H^2}{4\pi g \rho_{01}} k\right).$$

В обратном предельном случае получаем альфвеновскую волну в холодной плазме $\omega' = \pm \sqrt{2\mu}\, kv_{01}$.

В заключение выражаю благодарность Б. А. Тверскому за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydronagnetic stability. Oxford, Clarendon press., IX, 1961.
2. Talwar S. P. Zeits. Astrophys., **47**, 161, 1959.
3. Kruskal M., Schwarzshild M. Proc. Roy. Soc., **223 A**, 348, 1954. (Перевод. «Пробл. совр. физики», вып. 2, 1956).
4. Rosenbluth M., Longmire C. Ann. Phys., I, No. 120, 1957. (Первод. «Пробл. совр. физики», вып. 1, 1958).
5. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М., ИЛ, 1952.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным управлениям, § 25. М., Физматгиз, 1961.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным управлениям. М., Физматгиз, 1961, стр. 497.

Поступила в редакцию
6. 7 1967 г.

НИИЯФ