

Б. ЧАКРАБОРТИ

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ ГРАНИЦ

Разработана теория решений уравнений Власова для нелинейных эффектов на плоской границе раздела вакуум-плазма для поперечных волн.

### Введение

Статистическая плазма обладает нелинейными свойствами. В работе [3] изучаются некоторые из них для неограниченной плазмы в рамках уравнений Власова. В настоящей статье используются результаты работы [3] и при наличии плоской границы плазмы. Плоская монохроматическая волна, наклонно падающая из вакуума, рассматривается в качестве источника возмущения волн в плазме, и она считается волной первого приближения. Во втором приближении возникает волновой ветер и продольная волна второй гармоники; в третьем приближении получаются первая и третья гармоники поперечной волны.

Для волны второй гармоники используется граничное условие, вытекающее из уравнения непрерывности, и определяется поверхностная плотность электрического заряда, которая оказалась зависящей от проекции продольной волны вдоль нормали.

Поправки к волновому числу появляются в третьем приближении. Они зависят от квадрата амплитуд исходных волн.

Преломленная поперечная волна третьей гармоники не имеет на верхней границе соответствующей падающей волны третьей гармоники потому, что падающая волна должна иметь частоту и амплитуду, которые определяются свойствами источника волн и не зависят от свойства среды. Равенство фаз волн определяет два различных направления распространения на каждой стороне границы раздела, а распространение в обратных направлениях этих линий невозможно; на верхней границе однородной плазмы имеется направление преломленной волны и направление, идущее к поверхности раздела симметрично проходящей волны относительно нормали к границе (второе направление в плазме).

Оптические граничные условия определяют амплитуды волны в вакууме вдоль отраженной волны первой гармоники, и плазменной поперечной волны вдоль второго направления. Предположение существования волны [2] не приводит к нарушению преломления волны третьей гар-

моники при переходе из плазмы в вакуум через нижнюю поверхность слоя плазмы. Подчеркиваем, что волна третьей гармоники, распространяющаяся через верхнюю границу в вакууме вдоль отраженной волны первой гармоники, в действительности не отражается, а излучается из плазмы за счет нелинейных свойств среды.

В нелинейных диспергирующих диэлектрических средах вектор поляризации разлагается в ряд по степени электрического поля и используется собственное решение, кроме вынужденного (т. е. привлечения общего решения однородных уравнений) (см. [2, 3] и [4]).

В рамках уравнений Власова амплитуда собственной волны берется равной нулю, потому что дисперсионное соотношение для собственной волны в любом приближении, равном  $\omega^2 = k^2 c^2$ , удовлетворяется только в вакууме. В указанных работах в случае падающих волн с двумя разными частотами используется волна, идущая изнутри к границе; остается неясным, почему не рассмотрена возможность возбуждения такой волны в случае падающей волны с одной частотой.

Нелинейные и другие явления в ограниченной плазме изучались рядом авторов [6]—[8].

Рютов [7] рассмотрел нелинейные взаимоотношения падающей волны с поверхностными и собственными колебаниями тонкого слоя холодной плазмы при зеркальном отражении в случае частоты, близкой к плазменной частоте. В отличие от работ Рютова [7] и Романова [8] в данной статье ставятся иные задачи и решаются они другими методами. Исследование нелинейных эффектов в ограниченной и неограниченной плазме началось сравнительно недавно. Общей теории нелинейных эффектов еще не построено. Поэтому приходится выяснять нелинейные эффекты для каждой задачи отдельно.

## § 1. Поправки к волновому числу и к амплитуде в преломленной волне

В работе [3] показано, что во втором приближении не имеется поправок к частоте и они появляются только в третьем приближении. Аналогично и для краевой задачи поправки к волновому числу возникают в третьем приближении (при неизменной частоте волн). Полагая функцию распределения равной

$$f_3(\vec{r}, \vec{v}, t) = \Psi_1(\vec{v}) \cos(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t) + \psi_3(\vec{v}) \cos(3\vec{k}_1 \vec{r} - 3\omega t) + \\ + \rho_1(\vec{v}) \sin(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t) + \rho_3(\vec{v}) \sin(3\vec{k}_2 \vec{r} - 3\omega t)$$

(см. уравнение (12) — (13) в [3]), вычисляем лишь  $\Psi_1(\vec{v})$  и  $\rho_1(\vec{v})$ .  $\psi_3(\vec{v})$  и  $\rho_3(\vec{v})$  дают только амплитуды третьей гармоники, величины которых берутся из (14) и (15). Отсюда получаем

$$\Psi_1 = \frac{\omega_0^2 \omega}{\omega^2 - k_1^2 c^2} \frac{m}{\chi T} \frac{v_{\perp 1} f_0}{\omega - k_1 v_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp 1} \Psi_1 d\vec{v} = E_{t1} \frac{Ne}{m} \delta k_{\perp 1} \frac{m}{\chi T} \left\{ \frac{v_{\perp 1} v_{\parallel} f_0}{(\omega - k_1 v_{\parallel})^2} + \right. \\ \left. + \frac{2kc^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \frac{v_{\perp 1} f_0}{\omega - k_1 v_{\parallel}} \right\} - \frac{\omega_0^2}{4Nk_1} \frac{1}{\omega - k_1 v_{\parallel}} \frac{\partial g_1}{\partial v_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 d\vec{v} - \\ - E_{t1} \frac{e}{m} \frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp 1}} (2\Phi_1 - \Phi_2) + E_{t1} \cdot \frac{e}{m} \frac{k_1}{2\omega} \frac{v_{\perp 1}}{\omega - k_1 v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} (2\Phi_1 - \Phi_2),$$

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{\omega_0^2 \omega}{\omega^2 - k_2^2 c^2} \frac{m}{\chi T} \frac{v_{\perp} f_0}{\omega - k_2 v_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp} \rho_1 d\vec{v} = \\
 &= -E_{t_2} \frac{Ne}{m} \frac{m}{\chi T} \delta k_{\perp_2} \left\{ \frac{v_{\perp} v_{\parallel} f_0}{(\omega - k_2 v_{\parallel})^2} + \frac{2kc^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \frac{v_{\perp} f_0}{\omega - k_2 v_{\parallel}} \right\} + \\
 &+ \frac{\omega_0^2}{4Nk_2} \frac{1}{\omega - k_2 v_{\parallel}} \frac{\partial g_2}{\partial v_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2 d\vec{v} + E_{t_2} \frac{e}{m} \frac{1}{2\omega} \frac{\partial}{\partial v_{\perp_1}} (2\Phi_1 + \Phi_2) + \\
 &+ E_{t_2} \frac{e}{m} \frac{k_2}{2\omega} \frac{v_{\perp_2}}{\omega - k_2 v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} (2\Phi_1 + \Phi_2), \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $k = k + \delta k_{\perp_1}$  и  $k_2 = k + \delta k_{\perp_2}$ . Умножим (1) на  $v_{\perp_1}$ , интегрируем по  $\vec{v}$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и вычисляем  $\delta k_{\perp_1}$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} \psi_1(\vec{v}) d\vec{v}$ . Разлагаем по степеням  $\delta k_{\perp_1}$  знаменатели уравнений, полученных в результате интегрирования, и приравняем справа и слева величины третьего, пятого и высших порядков малости. Из уравнения, содержащего величины третьего порядка малости, исключается  $\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} \psi_1(\vec{v}) d\vec{v}$  с помощью (4) в [3] и определяется  $\delta k_{\perp_1}$  путем определения  $\delta \omega_{\perp_1}$ . В результате получаем

$$\begin{aligned}
 \delta k_{\perp_1} &= - \left( \frac{e}{mc} \right)^2 \frac{\omega_0^2}{16\omega^4} \left[ E_{t_1}^2 \left( 1 - \frac{3\chi T}{mc^2} \right) + E_{t_2}^2 \left( 1 + \frac{9\chi T}{mc^2} \right) \right] - \\
 &- E_{t_1}^2 \frac{8\omega_0^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{7\chi T}{mc^2} \right) \left\{ \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \left( 1 + \frac{2\chi T}{mc^2} \right) + \varepsilon \right\}^{-1} - E_{t_2}^2 \frac{8\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\chi T}{mc^2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{\omega_0^4}{\omega^4} \left( 1 + \frac{2\chi T}{mc^2} \right) + \varepsilon \right\}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Меняя местами  $E_{t_1}$  и  $E_{t_2}$ , получаем выражение для  $\delta k_{\perp_2}$ . Здесь  $\varepsilon = \frac{4\gamma^2}{\omega^2}$ , где значение  $\gamma$  объясняется в [3]. Этой величиной можно пренебречь в случае плотной плазмы. Заметим, что  $\delta k_{\perp_1}$  и  $\delta k_{\perp_2}$  зависят от квадрата амплитуды исходных волн и поэтому  $k + \delta k_{\perp_1}$  и  $k + \delta k_{\perp_2}$  не удовлетворяют дисперсионному соотношению линейного приближения.

Из уравнения пятого порядка малости, при сокращении справа и слева на  $\delta k_{\perp_1}$ , получается величина третьего порядка малости  $\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} \psi_1(\vec{v}) d\vec{v}$ .

Так как в общем случае вычисления очень громоздки, приведем приближенное выражение этого интеграла при  $E_{t_2} = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  и  $T = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp_1} \psi_1 d\vec{v} &= E_{t_1}^3 \frac{e}{m} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \right) (4\pi m \omega c^2)^{-1} \left[ \frac{\omega_0^4}{8\omega^4} \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{4\omega^2} \right)^{-1} + \right. \\
 &\left. + 1 + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично при  $E_{t_1} = 0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp, \rho_1} d\vec{v} = E_{t_2}^3 \frac{e}{m} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2}\right) (4\pi m \omega c^2)^{-1} \left[ \frac{\omega_0^4}{8\omega^4} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{4\omega^2}\right)^{-1} - 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} \right].$$

Если поправки к амплитудам волн, имеющих волновые числа  $k_1$  и  $k_2$ , обозначим символами  $\delta E_{t_1}$  и  $\delta E_{t_2}$ , то получим

$$\begin{aligned} \delta E_{t_1} &= \frac{4\pi e \omega}{\omega^2 - k^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp, \psi_1} d\vec{v} + 4\pi e \omega \left\{ \frac{1}{\omega^2 - (k + \delta k_{\perp 1})^2 c^2} - \frac{1}{\omega^2 - k^2 c^2} \right\} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp, g_{\perp 1}} d\vec{v} = \frac{4\pi e \omega}{\omega^2 - k^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp, \psi_1} d\vec{v} + E_{t_1} \frac{\delta k_{\perp 1}}{k} \frac{2k^2 c^2}{\omega^2 - k^2 c^2}, \\ \delta E_{t_2} &= - \frac{4\pi e \omega}{\omega^2 - k^2 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\perp, \rho_1} d\vec{v} - E_{t_2} \frac{\delta k_{\perp 2}}{k} \frac{2k^2 c^2}{\omega^2 - k^2 c^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом параграфе мы вычислили в третьем приближении поправки к волновому числу и поправки к амплитудам волн первой гармоники.

## § 2. Граничные условия для поперечных волн

Предполагаем, что полупространство  $z > 0$  заполнено плазмой, а для  $z < 0$  имеется вакуум. Пусть ось  $x$  направлена вдоль линии пересечения плоскости падения волн и границы плазмы ( $z = 0$ ) и составляет угол  $\alpha$  с волновым вектором падающей и  $\beta$  с проходящей волной.

Ограничиваемся случаем, когда падающая волна плоскополяризована, электрический вектор которой лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. Подставим  $E_{t_2} = 0$  и  $E_{t_1} \equiv E_t$  в аналогичные уравнения в [3]. Пусть направление совпадает с направлением электрического вектора проходящей волны. Граничные условия запишутся в виде

$$E_y|_{z=-0} = E_y|_{z=+0}, \quad H_x|_{z=-0} = H_x|_{z=+0}. \quad (2)$$

Для волны первой гармоники имеем (см. рис. 1)

$$(E'_t, E_r) = E_t \frac{2\omega \sin \alpha, k'c \sin \beta' - \omega \sin \alpha}{k'c \sin \beta' + \omega \sin \alpha}, \quad (3)$$

$$\omega \cos \alpha = k'c \cos \beta', \quad (4)$$

где  $E'_t = E_t + \delta E_t$ ,  $k' = k + \delta k$ ,  $\beta' = \beta + \delta \beta$  и  $\beta'$  дает угол отклонения проходящей волны до третьего, а  $\beta$  в рамках линейного приближения. Для  $\delta \beta$  получаем

$$\delta \beta \approx \frac{\delta k}{k} \cos \beta.$$

Следовательно, эта добавка обращается в нуль при нормальном падении (т. е.  $\alpha = \frac{\pi}{2} = \beta$ ). Так как  $\delta E_t$  имеет третью степень по  $E_t$ , урав-

нение для  $E_t'$ , полученное из (3), представляет собой кубическое уравнение относительно  $E_t$  вместо уравнения первой степени в рамках линейного приближения.

Рассмотрим уравнение, возникающее на границе плазмы из-за возбуждения в плазме поперечной волны третьей гармоники:

$$E_{3t} \sin(3k'x \cos \beta' + 3k'z \sin \beta' - 3\omega t),$$

где  $E_{3t}$  вычисляется из (14) и (15) в [1]. Следуя введению, имеем в вакууме волну  $E_3^r \sin\left(\frac{3\omega}{c}x \cos \alpha - \frac{3\omega}{c}z \sin \alpha - 3\omega t\right)$  и также в плазме волну (вдоль второго направления)  $E_3^R \sin(3k'x \cos \beta' - 3k'z \sin \beta' - 3\omega t)$  (см. рис. 1).

Согласно соотношению (4), граничные условия (2) дают

$$(E_3^L, E_3^R) = -E_{3t}(2k'c \sin \beta', k'c \sin \beta' + \omega \sin \alpha) \cdot \frac{(k'c \sin \beta' + \omega \sin \alpha)}{\omega^2 - k^2 c^2}, \quad (5)$$

где  $\omega^2 \neq k^2 c^2$  в плазме.

В этом параграфе вычислены до третьего приближения включительно амплитуды отраженной и проходящей волн первой гармоники, угол преломления и также амплитуды поперечных волн третьей гармоники.

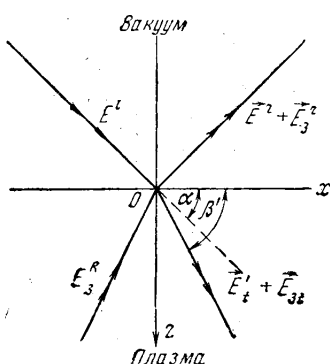


Рис. 1. Распространение электромагнитных волн на верхней границе плазмы

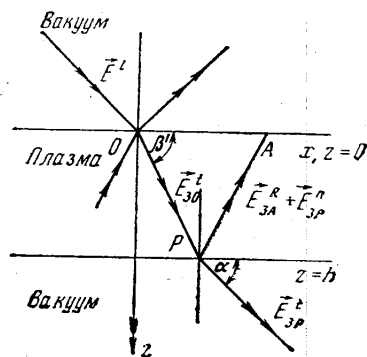


Рис. 2. Отражение и преломление волн третьей гармоники третьего приближения на нижней плоскости плазменного слоя

### § 3. Поверхностный заряд на границе плазмы

Граничные условия (2) являются достаточными только для поперечных волн; а в работе [3] показано, что вторая гармоника имеется только в виде продольной волны. Продольная волна не может иметь соответствующего магнитного поля, а следовательно, не имеются волны второй гармоники в вакууме. Поэтому необходимо привлечь граничные условия, исходя из уравнения непрерывности на границе плазмы для волн второй гармоники. Если  $\delta\sigma$  обозначает плотность поверхностного заряда, то

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\sigma) + \delta j_z|_{z=+0} - \delta j_z|_{z=-0} = 0, \quad (6)$$

где  $\delta j_z|_{z=+0}$  — нормальный компонент потока заряженных частиц, который дается выражением

$$\begin{aligned} \delta j_z|_{z=+0} &= me \sin \beta \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} \{f_2(\vec{r}, \vec{v}t) - Nf_0(\vec{v}) - \Phi_1(\vec{v})\} d\vec{v}|_{z=+0} = \\ &= me \sin \beta \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} \Phi_2 d\vec{v} \cos(2kx \cos \beta - 2\omega t). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как для  $z < 0$  имеется вакуум, получаем  $\delta j_z|_{z=0} = 0$ .

Интегрируя (6) по времени, используя результат

$$\omega \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\vec{v}) d\vec{v} = k \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} \Phi_2(\vec{v}) d\vec{v}$$

и (10) и (11) в [1] для  $\delta\sigma$  имеем

$$\delta\sigma = (E_{i_1}^2 - E_{i_2}^2) \frac{ke\omega_0^2 \sin \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F dv_{\parallel}}{(\omega - kv_{\parallel})^3}}{32\pi\omega} \cdot \frac{\sin(2kx \cos \beta - 2\omega t)}{\left\{1 - \frac{\omega_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F dv_{\parallel}}{(\omega - kv_{\parallel})^2}\right\}}$$

Возникающая поверхностная плотность пропорциональна проекции продольной волны вдоль  $oz$  на границу плазмы.

Тангенциальный компонент тока  $\delta j_x$  можно вычислять подобно  $\delta j_z$ , подставив в (7)  $\cos \beta$  вместо  $\sin \beta$ . Поверхностная плотность заряда и  $\delta j_x$  является нелинейным эффектом, сосредоточенным только на границе плазмы.

$$\text{Выражение } \delta j_z^0 = me \sin \beta \int_{-\infty}^{\infty} v_{\parallel} \Phi_1(\vec{v}) d\vec{v}$$

нормальная составляющая на границе электронного ветра. Стационарная плотность заряда не появляется, так как  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\vec{v}) d\vec{v} = 0$  (см. [3]).

Вследствие закона сохранения числа частиц указанный ток на границе должен компенсироваться током обратного направления, возникающим в областях вне распространения фронта поперечной волны. Аналогичная ситуация имеет место для акустического ветра в жидкостях и газах [9].

#### § 4. Нижняя поверхность плазменного слоя

До сих пор мы рассматривали волны на границе плазмы, занимающей полупространство  $z > 0$ . Вполне аналогично проводится вычисление для слоя плазмы между плоскостями  $z = 0$  и  $z = h$ . Так как результаты для волн первой гармоники вычисляются просто, ниже развивается вычисление только для волн третьей гармоники третьего приближения.

Рассмотрим падающую волну первой гармоники из вакуума на верхней поверхности в точке  $O$ . Она возбуждает в плазме преломленную волну третьей гармоники.

$$E_{30}^i \sin(3k'x \cos \beta' + 3k'z \sin \beta' - 3\omega t),$$

где  $E_{30}^t = E_{3t}$  представляет собой падающую волну в точке  $p$  нижней поверхности (см. рис. 2). Кроме этой волны в точке  $p$  имеется еще волна

$$E_{3A}^R \sin(3k'x \cos \beta' - 3k'z \sin \beta' - 3\omega t),$$

идущая изнутри вдоль второго направления из точки  $A$  верхней границы (это направление совпадает с направлением отраженной волны в  $p$ ), где  $E_{3A}^R (\equiv E_3^R)$  берется из (5).

Граничные условия

$$E_y|_{z=h+0} = E_y|_{z=h-0}, \quad H_x|_{z=h+0} = H_x|_{z=h-0} \quad (8)$$

определяют амплитуду волны вдоль отраженной волны в точке  $p$ :

$E_{3p}^r \sin(3k'x \cos \beta' - 3k'z \sin \beta' - 3\omega t)$  и также волны, проходящей в вакуум:  $E_{3p}^t \sin\left(\frac{3\omega}{c}x \cos \alpha + \frac{3\omega}{c}z \sin \alpha - 3\omega t\right)$ . Подставляя эти выражения в (8) и приравняв коэффициенты при  $\sin(3k'x \cos \beta' - 3\omega t)$  справа и слева, получим

$$(E_{3p}^r, E_{3p}^t) = E_{3t} \left[ \frac{4\omega k'c \sin \alpha}{\omega^2 - k^2 c^2}, \frac{2k'c \sin \beta' \cos(k'h \sin \beta')}{(k'c \sin \beta' + \omega \sin \alpha) \cos(k'h \sin \alpha)} \right].$$

Нельзя использовать результаты, полученные из коэффициентов при  $\cos(3k'x \cos \beta' - 3\omega t)$ , потому что при  $h=0$  они не имеют смысла.

Таким образом, выше вычислены амплитуды волн третьей гармоники на нижней границе плазменного слоя.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. А. А. Власову за предложенную тему и помощь в работе, а также проф. Р. В. Хохлову за ценное замечание.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М., Гостехиздат, 1950; ЖЭТФ, 8, 191, 1938.
2. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., изд. ВИНТИ, 1964.
3. Чакраборти Б. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астроном., № 4, 3, 1967.
4. Bloembergen N., Pershan P. S. Phys. Rev. 128, 606, 1962.
5. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S. Phys. Rev., 127, 1918, 1962.
6. Силян В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмодных сред. М., Атомиздат, 1961.
7. Рютов Д. Д. Диссертация, ФИАН, 1965.
8. Романов Ю. А. «Изв. вузов», радиофизика, 7, 829, 1964.
9. E s k a r t C. Phys. Rev., 73, 68, 1948.

Поступила в редакцию  
1. 12 1965 г.

Кафедра  
теоретической физики