

Экспериментально в кристаллах размерами $4,5 \times 4,5 \times 6,5$ мм и $6,5 \times 6,5 \times 7,5$ мм удавалось возбуждать колебания с $m=1$ и $m=3$. В первом случае приложение напряжения приводило к просветлению центра кристалла, во втором — к появлению светящихся пятен. Отсутствие возбуждения на четных модах, а также трудности получения больших m связаны с формой примененных электродов.

Основные характеристики модулятора исследовались на кристалле поперечным размером $4,5 \times 4,5$ мм, в котором возбуждалась стоячая волна сжатия на основной частоте с функцией распределения

$$\Phi_1(x, y) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x'}{a} \sin \frac{\pi y'}{a} \right).$$

Для простоты измерялась постоянная составляющая прошедшего через кристалл света, хотя наблюдения за формой переменной составляющей также велись. В качестве индикатора использовался фотоумножитель ФЭУ-36, длина волны света составляла ~ 4000 Å.

На рис. 1 приведена зависимость постоянной составляющей прошедшего через модулятор света от напряжения на кристалле. Кривая 1 относится к случаю узкого светового пучка (диаметр 1,2 мм), проходящего через пучность колебания (центр грани кристалла); кривая 2 соответствует пучку света, занимающему всю грань кристалла. Резкое уменьшение глубины модуляции в последнем случае связано с усреднением выражения (2) по x и y .

Для узкого пучка света, проходящего через центр грани, снимались частотные и пространственные характеристики модулятора. Их вид существенно зависит от соотношения $\frac{v_0}{v_{\lambda/2}}$. На рис. 2 приведены частотные характеристики для трех значений v_0 .

Изменение формы кривых связано с нелинейностью амплитудной характеристики. По резонансной кривой, полученной на линейном участке амплитудной характеристики, может быть определена добротность кристалла как механической колебательной системы. В нашем случае она оказалась равной 525 ± 50 . Эта добротность должна определять тот выигрыш по напряжению, который дает использование резонансного пьезоэффекта. Сопоставление полученного экспериментально $v_{\lambda/2}$ со статическим значением этой величины дает выигрыш в 460 ± 80 раз. Совпадение значений можно считать удовлетворительным. Таким образом, для создания модуляторов света на фиксированных частотах в диапазоне нескольких сотен килогерц целесообразно использовать пьезорезонанс в кристалле *ADP*. При этом может быть получен выигрыш по модулирующему напряжению на 2—3 порядка.

Поступила в редакцию
31. 3 1967 г.

Кафедра
физики колебаний

УДК 62—50

Г. А. БЕНДРИКОВ, В. И. ОГОРОДНИКОВА К ТЕОРИИ ДВУХКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЧНЫМИ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Важным классом систем автоматического управления являются двухканальные системы с симметричными перекрестными связями, примерами которых могут быть системы управления летательными аппаратами, следящие системы наведения, система параллельного включения двух самолетных генераторов и другие.

Исследование данного класса систем методом траекторий корней [1] имеет преимущество по сравнению с существующими, так как дает возможность наглядно проследить изменение свойств в области устойчивости систем, описываемых уравнениями достаточно высокого порядка.

Как известно [2], двухканальные системы с идентичными каналами и симметричными перекрестными связями имеют характеристические уравнения

$$[1 + W(p)]^2 - [a(p)]^2 = [1 + W(p) + a(p)][1 + W(p) - a(p)] = 0 \quad (1)$$

с прямыми перекрестными связями и

$$[1 + W(p)]^2 - [a(p)W(p)]^2 = [1 + W(p) +$$

$$+ a(p) W(p) [1 + W(p) - a(p) W(p)] = 0 \quad (2)$$

с обратными перекрестными связями.

В уравнениях (1) и (2) $W(p) = \frac{k\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)}$ — передаточная функция основного канала, $a(p)$ — передаточная функция перекрестной связи, k — свободный параметр, принимающий действительные значения от 0 до ∞ . Φ_n и Ψ_m — полиномы p целых степеней n и m соответственно.

При рассмотрении систем n -го порядка используем уравнение траекторий корней и формулы параметра, приведенные в работе [1].

Для иллюстрации применения метода траекторий корней к двухканальным системам рассмотрим систему с прямой жесткой перекрестной связью $a(p) = \text{const}$, передаточная функция основного канала которой

$$W(p) = \frac{k(p+1)}{p(p^2+2p+5)(p+3)}. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) переписывается в виде

$$\left[p(p^2+2p+5)(p+3) + \frac{k}{1-a}(p+1) \right] \times \\ \times \left[p(p^2+2p+5)(p+3) + \frac{k}{1+a}(p+1) \right] = 0. \quad (4)$$

Траектории корней для первого множителя уравнения (4) и для второго имеют одинаковый вид, и положение корней на траекториях определяется, как известно, значением параметров траекторий

$$K_1 = \frac{k}{1-a} \quad \text{и} \quad K_2 = \frac{k}{1+a}. \quad (5)$$

При заданном коэффициенте усиления k и перекрестной связи, а параметры траекторий K_1 и K_2 различны, поэтому расположение корней на траекториях также различно. Одному и тому же изменению коэффициента усиления k соответствуют разные изменения параметров траекторий K_1 и K_2 . Это соответствует разным перемещениям корней по траекториям: быстро и медленно. В данном случае для двухканальной системы, описываемой уравнением восьмого порядка, уравнение траекторий корней относительно ω^2 второго порядка:

$$\omega^4 - 2(\delta^2 + 3\delta + 3)\omega^2 - (3\delta^4 + 14\delta^3 + 26\delta^2 + 22\delta + 15) = 0. \quad (6)$$

По траекториям (рис. 1, а) движутся как «быстрые», так и «медленные» корни.

При $a < 1$ «быстрые» и «медленные» корни движутся по нечетным траекториям ($K_1 > 0$, $K_2 > 0$); они обозначены простыми стрелками. Система теряет устойчивость при выходе на мнимую ось «быстропередвигающихся» корней.

При $a > 1$ «быстрые» корни движутся по четным траекториям ($K_1 < 0$), которые обозначены двойными стрелками. Система становится аperiodически неустойчивой. «Медленные» корни движутся по нечетным траекториям ($K_2 > 0$). На рис. 1, б. приведены графики параметра траекторий

$$-K = \frac{\delta^4 + 5\delta^3 + 11\delta^2 + 15}{\delta + 1} \quad (7)$$

при $\omega = 0$ (сплошная кривая) и

$$-K = (4\delta^3 + 15\delta^2 + 22\delta + 15) - (4\delta + 5)\omega^2 \quad (8)$$

при $\omega \neq 0$ (пунктирная кривая).

Графики траекторий корней и параметра траекторий дают возможность определить положение корней системы в области устойчивости. Например, при $k=8$ и $a=0,5$ параметры траекторий равны $K_1=16$ и $K_2=5,3$. Проведя линии постоянных значений параметра траекторий (рис. 1, б), найдем положение всех восьми корней уравнения (4).

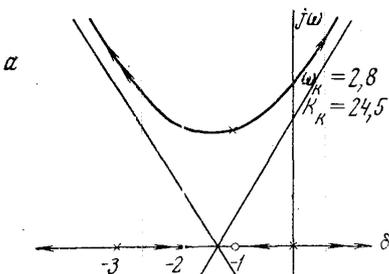
Из уравнений (6) и (8) определяем критические значения частоты и параметра траекторий: $\omega_k=2,8$ и $K_k=24,5$. Следовательно, коэффициент усиления в области устойчивости будет изменяться в пределах $0 < k < 24,5(1-a)$. Введение прямой перекрестной связи при $a < 1$ сужает область устойчивости системы по сравнению с одноканальной системой.

Рассмотрим двухканальную систему с обратной симметричной связью и передаточной функцией основного канала, которая задана уравнением (3). Тогда характеристическое уравнение (2) принимает вид

$$[p(p^2 + 2p + 5)(p + 3) + k(1 + a)(p + 1)] [p(p^2 + 2p + 5)(p + 3) + k(1 - a)(p + 1)] = 0. \quad (9)$$

Очевидно, уравнение траекторий корней имеет вид (6). В этом случае «быстрым» корням соответствует первый множитель уравнения (9), а «медленным» — второй. Параметры траекторий равны:

$$K_1 = k(1 + a) \text{ и } K_2 = k(1 - a).$$



При $a < 1$ область устойчивости системы $0 < k < \frac{K_k}{1 + a}$. Например, $a = 0,5$, $0 < k < 16,3$. Таким

образом, введение обратной симметричной связи тоже сужает область устойчивости системы.

При $a > 1$ «быстрые» корни движутся по нечетным траекториям ($K_1 > 0$), а «медленные» корни — по четным траекториям ($K_2 < 0$). Система становится неустойчивой.

Сравнение областей устойчивости при введении прямой и обратной перекрестных симметричных связей ($a = 0,5$) показывает, что область устойчивости во втором случае шире, чем в первом.

При рассмотрении абсолютно устойчивых систем введение прямых и обратных симметричных связей при $a < 1$ не влияет на устойчивость. Система остается абсолютно устойчивой. Например, если передаточная функция основного канала

$$W(p) = \frac{kp}{(p + 1)(p + 2)(p + 3)}, \quad n - m \leq 2,$$

то область устойчивости системы $0 < k < \infty$. Это объясняется тем [1], что «быстрые» и «медленные» корни движутся только по нечетным траекториям, оставаясь все время в левой плоскости корней p .

При $a > 1$ «быстрые» корни (прямая связь) выходят по четным траекториям ($K_1 < 0$) в правую часть плоскости корней. Система устойчива при $a = 3$ в области $0 < k < 20$.

Если перекрестная связь обратная, тогда при $a > 1$ «медленные» корни движутся также по четным траекториям ($K_2 < 0$). Область устойчивости системы сужается $0 < k < 5$ ($a = 3$).

Аналогичным способом метод траекторий корней может быть использован для исследования двухканальных систем с гибкими перекрестными связями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Красовский А. А. О процессах автоматического регулирования в однопольных связанных линейных системах. «Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского», вып. 576, 1955.

Поступила в редакцию
27.4.1967 г.

Кафедра
теории колебаний