УДК 538.566+621.371

П. Е. СТРЕЖ

О ДИСПЕРСИОННОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

В теории распространения электромагнитных волн большую роль играет анализ дисперсионного уравнения, корни которого определяют собой показатели преломления характеристических волн. Для случая однородной или слоистонеоднородной сред получение дисперсионного уравнения обычно связано с предположением, что уравнения Максвелла допускают решение типа плоских волн [1—3]. Если свойства среды изменяются по всем координатным направлениям, то уравнения Максвелла не имеют решений типа плоских волн, и возникает проблема получения дисперсионного уравнения для волн в трехмерной неоднородной плазме.

Ниже получено дисперсионное уравнение для высокочастотных волн малой амплитуды, распространяющихся в полупространстве $z \geqslant 0$, заполненном неоднородной анизотропной плазмой, параметры которой достаточно медленно меняются на расстояниях длины распространяющейся волны. Рассмотрение ограничено случаем полностью ионизированной плазмы; движением ионов пренебрегаем.

В квазигидродинамическом приближении будем исходить из следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_t, \\
\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\
m\frac{d\vec{u}}{dt} = e(\vec{E}_0 + \vec{E}) + \frac{e}{c}[\vec{u}\vec{H}_0] - \frac{1}{n}\nabla p - m\nu_{\text{эфф}}\vec{u}, \\
\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\vec{u}) = 0, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) = 0, \\
\vec{j}_t = ne\vec{u}; \\
n = n_0(\vec{r}) + n_1(\vec{r})\exp(j\omega t), \quad n_1 \ll n_0; \\
p = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r})\exp(j\omega t), \quad p_1 \ll p_0; \\
\vec{u} = \vec{u}_1(\vec{r})\exp(j\omega t),
\end{gathered} \tag{1}$$

Скорость $\vec{u}_1$ мала; $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$ — стационарные электрическое и магнитное поля; $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, n_0, p_0 — некоторые заданные произвольного вида медленно меняющиеся функции координат.

В безразмерной системе единиц будем рассматривать $\vec{E}$ и $\vec{H}$ как [4]

$$\vec{E} = \vec{Q}(\xi, \eta, \zeta)\exp(j\omega_r\alpha\eta), \quad \vec{H} = \vec{v}(\xi, \eta, \zeta)\exp(j\omega_r\alpha\eta), \tag{2}$$

где $\xi = \frac{\omega_1}{c}x$, $\eta = \frac{\omega_1}{c}y$, $\zeta = \frac{\omega_1}{c}z$, $\omega_r = \frac{\omega}{\omega_2}$, $\alpha = -\sin\varphi$, $[\omega_1] = 1$ $сек^{-1}$,

φ — угол падения плоской волны частоты ω на полупространство $z \geqslant 0$, yz — плоскость падения.

Возмущения в плазме под воздействием $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должны отражать характер волнового процесса, поэтому будем считать, что

$$n_1(\vec{r}) = N(\xi, \eta, \zeta)\exp(j\omega_r \alpha\eta),$$
$$\vec{u}_1(\vec{r}) = \vec{U}(\xi, \eta, \zeta)\exp(j\omega_r \alpha\eta). \tag{3}$$

Производя формальное разложение функций $\vec{\theta}$, $\vec{v}$, N, $\vec{U}$ в ряд по обратным степеням ω_r с последующей подстановкой в систему уравнений (1), разделяя порядки и линеаризуя получающиеся уравнения, приходим к следующей системе зацепляющихся матричных уравнений [4]

$$\frac{\partial \vec{e}_0}{\partial \zeta_1} + jT\vec{e}_0 = 0,$$
$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \zeta_1} + jT\vec{e}_1 = F(\vec{e}_0), \quad \zeta_1 = \omega_r \zeta, \tag{4}$$

. . . .
. . . .
. . . .

где

$$\vec{e}_k = (\theta_{\eta k}, \theta_{\xi k}, v_{\eta k}, v_{\xi k}, N_k, -X \cdot U_{\zeta k}),$$

T — квадратная матрица шестого порядка, элементы которой являются некоторыми функционалами от параметров плазмы, напряженностей наложенных стационарных полей и угла падения волны на полупространство $z \geqslant 0$, k — степень рассматриваемого приближения.

В [4] было показано, что собственные значения матрицы T определяют собой показатели преломления характеристических волн. Поэтому уравнение

$$\det(T - \lambda I) = 0 \tag{5}$$

можно рассматривать как дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в слабонеоднородной анизотропной плазме, параметры которой медленно меняются на расстояниях длины распространяющейся волны по всем координатным направлениям. В общем случае оно имеет вид

$$p_1\lambda^6 + p_2\lambda^5 + p_3\lambda^4 + p_4\lambda^3 + p_5\lambda^2 + p_6\lambda + p_7 = 0 \tag{6}$$

и определяет, вообще говоря, шесть различных по модулю показателей преломления (в однородной анизотропной плазме $p_2 = p_3 = p_5 = 0$).

В частном случае плоской геометрии магнитного поля $\vec{H}_0 = (0, H_\eta, H_\zeta)$ и пренебрежения постоянным электрическим полем $\vec{E}_0$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$r_0\lambda^6 + r_1\lambda^5 + r_2\lambda^4 + r_3\lambda^3 + r_4\lambda^2 + r_5\lambda + r_6 = 0, \tag{7}$$

$$\text{где } r_0 = \beta[(1 - jZ)^2 - Y_\zeta^2]; \quad r_2 = \beta 2\alpha Y_\eta Y_\zeta;$$

$$\begin{aligned}
r_2 = &-\beta[2(1 - jZ)(1 - jZ - X) - 3\alpha^2(1 - jZ)^2 - 2(1 - \alpha^2)Y_\zeta^2 + \alpha^2 Y_\eta^2] + \\
&+ (1 - jZ)Y_\eta^2 - (1 - jZ - X)[(1 - jZ)^2 - Y_\zeta^2];
\end{aligned}$$

$$r_3 = -\beta 4\alpha(1 - \alpha^2)Y_\eta Y_\zeta + 2\alpha XY_\eta Y_\zeta;$$

$$\begin{aligned}
r_4 = &\beta[(1 - \alpha^2)(1 - 3\alpha^2)(1 - jZ)^2 - (1 - 2\alpha^2)X(1 - jZ) + X^2 - \\
&- (1 - \alpha^2)^2 Y_\zeta^2 + 2\alpha^2(1 - \alpha^2)Y_\eta^2] + \\
&+ 2(1 - jZ)(1 - jZ - X)[(1 - \alpha^2)(1 - jZ) - X] - \\
&- (1 - \alpha^2)(Y_\eta^2 + Y_\zeta^2)[2(1 - jZ) - X] + XY_\zeta^2;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$r_5 = \beta 2\alpha(1 - \alpha^2)^2 Y_\eta Y_\zeta - 2\alpha(1 - \alpha^2)XY_\eta Y_\zeta;$$

$$r_6 = \beta\{\alpha^2[(1 - \alpha^2)(1 - jZ) - X]^2 - \alpha^2(1 - \alpha^2)^2 Y_\eta^2\} +$$

$$+(1-\alpha^2)^2(1-jZ-X)Y_\eta^2+(1-\alpha^2)[(1-\alpha^2)(1-jZ)-X]Y_\zeta^2-$$
$$-(1-jZ-X)[(1-\alpha^2)(1-jZ)-X]^2;$$

$$X=\frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

$$\vec{Y}=\frac{\vec{\omega}_H}{\omega},$$

$$Z=\frac{\nu_{\text{эфф.}}}{\omega},$$

$$\beta=\frac{\varkappa T}{mc^2}.$$

При нормальном падении волны на полупространство $z \geqslant 0$ уравнение (7) полностью совпадает с дисперсионным уравнением для волн, распространяющихся в однородной анизотропной плазме (см., например, [1]). Однако для рассматриваемой трехмерной неоднородной плазмы все коэффициенты дисперсионного уравнения (7) являются некоторыми заданными функциями координат, явный вид которых определяется функциональной зависимостью параметров плазмы и напряженности внешнего магнитного поля от координат.

Приведенный выше метод получения дисперсионного уравнения не связан с предположением о плоском характере пространственной структуры распространяющихся волн и может быть использован при исследовании в линейном приближении высокочастотных волновых процессов в самых различных плазменных неоднородных средах, параметры которых заданы в виде конкретных функций координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
2. Ратклифф Дж. А. Магнито-ионная теория и ее приложения к ионосфере. М., ИЛ, 1962.
3. Budden K. G. Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge. 1961.

Поступила в редакцию
27. 4 1967 г.

Кафедра
волновых процессов