Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1967

УДК 538.566+621.371

Н. Е. СТРЕЖ

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрена задача о наклонном падении плоской монохроматической волны с произвольной поляризацией на неоднородную анизотропную среду, свойства которой изменяются по всем координатным направлениям. Методом последовательных приближений получена система зацепляющихся дифференциальных уравнений первого порядка, которая позволяет определить пространственную структуру волн, существующих в среде, если собственные значения матрицы коэффициентов при неизвестных оказываются различными. Показано, что свойства матрицы коэффициентов при неизвестных в системе уравнений во многом определяют условия распространения волн.

Исследование распространения волн в неоднородной анизотропной среде состоит в решении волновых уравнений при заданном тензоре диэлектрической проницаемости как функции координат $\hat{\epsilon}'(\vec{r})$. Причем получение точного решения этих волновых уравнений представляет в математическом отношении большие трудности, поэтому в теории распространения волн в таких средах большое значение имеют приближенные решения.

Для частного случая плоскослоистой среды, когда компоненты тензора диэлектрической проницаемости зависят лишь от одной координаты, исследование приближенного решения сводится к рассмотрению плоских волн с амплитудными коэффициентами, зависящими от координаты (см., например, [1, 2]). При этом широко распространено разделение волнового уравнения на две части [3, 4], одна из которых определяет пространственную структуру характеристической волны, а другая — взаимодействие ее с другими характеристическими волнами. В общем случае, когда параметры среды изменяются по всем координатным направлениям, уравнения Максвелла не имеют решений типа плоских волн, и поэтому уравнения в форме [3, 4] непригодны для исследования распространения волн в трехмерных неоднородных средах.

В настоящей работе рассматривается задача о падении плоской монохроматической волны произвольной поляризации на полупространство, заполненное средой, характеризующейся тензором диэлектрической проницаемости, компоненты которого являются произвольными непрерывно-дифференцируемыми функциями координат. Методы последовательных приближений для краевых задач с быстро осциллирующими граничными условиями [5] (впервые примененном в [6], а затем в

[7, 8] для случая изотропной среды) получена система зацепляющихся дифференциальных уравнений первого порядка для амплитудных коэффициентов с выделением «основных» и «взаимодействующих» членов. Система эта является тем самым обобщением уравнений в форме [4] на случай трехмерной неоднородной среды. В первом приближении определена пространственная структура волн, распространяющихся в такой среде, которая является хорошим приближением к точному решению, если свойства среды достаточно медленно изменяются на расстояниях порядка длины распространяющейся волны.

При распространении электромагнитных волн в неоднородной анизотропной среде поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j \frac{\omega}{c} \hat{\varepsilon}' \vec{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}, \tag{2}$$

где компоненты тензора диэлектрической проницаемости являются функциями координат.

Ниже будем считать, что неоднородная среда заполняет полупространство $z \geqslant 0$, причем из вакуума наклонно к границе раздела $z=0$ падает плоская монохроматическая волна частоты ω и произвольной поляризации; плоскость yz — плоскость падения. В [6—8] было показано, что поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для волн, распространяющихся в изотропной неоднородной среде, могут быть представлены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{\theta}(\xi, \eta, \zeta) \exp(j\omega_r \alpha_\eta \eta), \\ \vec{H} &= \vec{v}(\xi, \eta, \zeta) \exp(j\omega_r \alpha_\eta \eta), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \vec{\theta} &= \vec{\theta}_0 + \frac{1}{\omega_r} \vec{\theta}_1 + \frac{1}{\omega_r^2} \vec{\theta}_2 + \ldots, \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \frac{1}{\omega_r} \vec{v}_1 + \frac{1}{\omega_r^2} \vec{v}_2 + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

и введены безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\omega_1}{c} x, \quad \eta = \frac{\omega_1}{c} y, \quad \zeta = \frac{\omega_1}{c} z, \quad \omega_r = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad [\omega_1] = 1 \text{ сек}^{-1}.$$

Функции $\vec{\theta}$, $\vec{v}$ определялись из системы зацепляющихся уравнений, к которым преобразовывались соответствующие волновые уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ после подстановки в них (3)—(4).

Будем предполагать, что и в анизотропной неоднородной среде поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ представляются в виде некоторых, пока неизвестных функций

$$\vec{\theta}(\xi, \eta, \zeta) \exp(j\omega_r \alpha_\eta \eta), \vec{v}(\xi, \eta, \zeta) \exp(j\omega_r \alpha_\eta \eta).$$

Введение множителя $\exp(j\omega_r \alpha_r \eta)$ физически оправдано условием равенства тангенциальных компонентов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $\zeta_1 = 0$ и тем, что на границу раздела падает плоская монохроматическая волна, зависимость которой от координаты η представляется множителем $\exp(j\omega_r \sin\varphi\eta)$, где φ — угол падения.

Разложив составляющие функции $\vec{\theta}$ и $\vec{v}$ в ряд по степеням $1/\omega_r$, получим после подстановки (3)—(4) в (1)—(2) следующую систему зацепляющихся матричных уравнений, соответствующих различным порядкам малости:

$$\frac{\partial \vec{e}_0}{\partial \zeta_1} = -jT\vec{e}_0, \tag{5а}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \zeta_1} = -jT\vec{e}_1 + U(\vec{e}_0), \tag{5б}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \zeta_1} = -jT\vec{e}_2 + V(\vec{e}_0, \vec{e}_1), \qquad \zeta_1 = \omega_r \zeta, \tag{5в}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где введены векторы-столбцы

$$\vec{e}_k = (-\theta_{\eta k},\ \theta_{\xi k},\ v_{\eta k},\ v_{\xi k}) \tag{6}$$

и следующие обозначения:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_\eta \frac{\varepsilon_{\zeta\eta}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}} & -\alpha_\eta \frac{\varepsilon_{\zeta\xi}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}} & 0 & \left(\mu - \frac{\alpha_\eta^2}{\varepsilon_{\zeta\zeta}}\right) \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \left(\frac{\varepsilon_{\xi\zeta}\cdot\varepsilon_{\zeta\eta}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}} - \varepsilon_{\xi\eta}\right) & \left(\varepsilon_{\xi\xi} - \frac{\alpha_\eta^2}{\mu} - \frac{\varepsilon_{\xi\zeta}\,\varepsilon_{\zeta\xi}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}}\right) & 0 & -\alpha_\eta\cdot\frac{\varepsilon_{\xi\zeta}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}} \\ \left(\varepsilon_{\eta\eta} - \frac{\varepsilon_{\eta\zeta}\,\varepsilon_{\zeta\eta}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}}\right) & \left(\frac{\varepsilon_{\eta\zeta}\,\varepsilon_{\zeta\xi}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}} - \varepsilon_{\eta\xi}\right) & 0 & \alpha_\eta\cdot\frac{\varepsilon_{\eta\zeta}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$U(\vec{e}_0) = R_0\vec{e}_0 + R_\eta\cdot\frac{\partial\vec{e}_0}{\partial\eta} + R_\xi\cdot\frac{\partial\vec{e}_0}{\partial\xi},$$

$$V(\vec{e}_0, \vec{e}_1) = R_0\vec{e}_1 + R_\eta\cdot\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial\eta} + R_\xi\cdot\frac{\partial\vec{e}_2}{\partial\xi} + P_{\xi\eta}\frac{\partial^2\vec{e}_0}{\partial_\xi\,\partial_\eta} + P_{\eta\eta}\frac{\partial^2\vec{e}_0}{\partial\eta^2} + \tag{8}$$

$$+ P_{\xi\xi}\cdot\frac{\partial^2\vec{e}_0}{\partial\xi^2} + P_\eta\cdot\frac{\partial\vec{e}_0}{\partial\eta} + P_\xi\cdot\frac{\partial\vec{e}_0}{\partial\xi},$$

R_0, R_ξ, R_2, $P_{\xi\eta}$, $P_{\xi\xi}$, $P_{\eta\eta}$, P_ξ, P_η — матрицы простой структуры, элементы которых пропорциональны $\frac{\partial T_{ij}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial T_{ij}}{\partial\eta}$ и T_{ij} или равны нулю.

С помощью линейного преобразования

$$\vec{e}_k = S\cdot\vec{f}^{(k)} \tag{9}$$

уравнения (5) приведем к виду

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial\zeta_1} + j\Delta\cdot\vec{f}^{(0)} = \Gamma\cdot\vec{f}^{(0)}, \tag{10а}$$

$$\frac{\partial \vec{f}^{(1)}}{\partial \zeta_1} + j\Delta \cdot \vec{f}^{(1)} = \Gamma \cdot \vec{f}^{(1)} + U(S\vec{f}^{(0)}), \tag{10б}$$

$$\frac{\partial \vec{f}^{(2)}}{\partial \zeta_1} + j\Delta \cdot \vec{f}^{(2)} = \Gamma \cdot \vec{f}^{(2)} + V[S \cdot \vec{f}^{(0)},\ S\vec{f}^{(1)}], \tag{10в}$$

. . . .

. . . .

. . . .

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = -S^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial \zeta_1}, \tag{11}$$

а q_i и S — собственные значения и матрица собственных векторов для T соответственно.

Γ_{ij} определяют коэффициенты взаимодействия характеристических волн i-того и j-того типов и имеют тот же вид, что и для плоскослоистой среды [4], а именно:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ij} = {} & (A_i F_i A_j F_j)^{-1/2} \{(q_i' q_j - q_j' q_i)(a_3 b_5 + a_5 b_3) + q_i q_j (a_3 b_5' - a_3' b_5 + \\ & + a_5 b_3' - a_5' b_3) + q_i (a_4 b_5' - a_4' b_5 + a_6 b_3' - a_6' b_3) + \\ & + q_j (a_3 b_6' - a_3' b_6 + a_5 b_4' - a_5' b_4) + (q_i + q_j)(A_i' A_j - A_i A_j') + \\ & + (q_i' - q_j')(a_4 b_5 + a_6 b_3 + A_i A_j) + a_4 b_6' - a_4' b_6 + a_6 b_4' - a_6' b_4\}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{ii} = {} & (A_i F_i)^{-1} \{q_i^2 (a_3 b_5' - a_3' b_5 + a_5 b_3' - a_5' b_3) + a_4 b_6' - a_4' b_6 + \\ & + a_6 b_4' - a_6' b_4 + q_i (a_3 b_6' - a_3' b_6 + a_4 b_5' - a_4' b_5 + \\ & + a_5 b_4' - a_5' b_4 + a_6 b_3' - a_6' b_3)\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & a_1 = -(T_{11} + T_{44}), && b_3 = T_{34}, \\ & a_2 = T_{11} T_{44} - T_{14} T_{41}, && b_4 = T_{14} T_{31} - T_{34} T_{11}, \\ & a_3 = T_{12}, && b_5 = T_{31}, \\ & a_4 = T_{14} T_{42} - T_{12} T_{44}, && b_6 = T_{41} T_{34} - T_{44} T_{31}, \\ & a_5 = T_{42}, && q_i' \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta_1} q_i; \\ & a_6 = T_{41} T_{12} - T_{11} T_{42}, && a_i' \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta_1} a_i, \\ & A_i = q_i^2 + a_2 q_i + a_2, && b_i' \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta_1} b_i, \end{aligned} \tag{14}$$

$$F_1 = (q_1 - q_2)(q_1 - q_3)(q_1 - q_4), \quad F_3 = (q_3 - q_1)(q_3 - q_2)(q_3 - q_4),$$
$$F_2 = (q_2 - q_1)(q_2 - q_3)(q_2 - q_4), \quad F_4 = (q_4 - q_1)(q_4 - q_2)(q_4 - q_3).$$

(Проницаемость μ принята, ради простоты, равной единице в (12)—(14).)

Как следует из (12)—(14), сильное взаимодействие между волнами или их отражение может быть вблизи тех точек пространства, где имеется резкое возрастание множителя $(A_i F_i A_j F_j)^{1/2}$, т. е. когда матрица T имеет по крайней мере два одинаковых собственных значения, либо когда ее собственные значения удовлетворяют уравнению

$$q_i^2 + a_1 q_i + a_2 = 0. \tag{15}$$

В остальных случаях взаимодействие волн определяется степенью неоднородности среды, так как Γ_{ij} выражаются через производные по координате ζ_1. В слабонеоднородной среде, свойства которой достаточно медленно изменяются на длине волны, взаимодействием волн можно пренебречь. В этом случае решение уравнения (10а) будет иметь вид

$$\vec{f}^{(0)} = \exp\left(-j\int_{\zeta_{10}}^{\zeta_1} \Delta\, d\zeta_1\right)\vec{c}(\xi, \eta), \tag{16}$$

где $\vec{c}(\xi, \eta)$ — столбцовая матрица, элементы которой, вообще говоря, являются некоторыми функциями от ξ и η и должны удовлетворять условиям на границе раздела $\zeta_1 = 0$. В дополнении показано, что для случая слабонеоднородной среды решение уравнения (10а) может быть записано как

$$\vec{f}^{(0)} = \exp\left(-j\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \Delta \cdot d\zeta_1\right)\cdot\vec{c}, \tag{16a}$$

где вместо $\vec{c}(\xi, \eta)$ взята столбцовая матрица $\vec{c}$, состоящая из произвольных постоянных.

Учитывая (6), (9), можно представить монохроматическую волну в произвольной точке полупространства как суперпозицию четырех невзаимодействующих характеристических волн с компонентами

$$\begin{aligned}
E_\eta &= -S_{1j}\cdot f_j^{(0)}\cdot\exp(-j\omega_r \sin\varphi\eta),\\
E_\xi &= S_{2j} f_j^{(0)}\cdot\exp(-j\omega_r \sin\varphi\eta),\\
H_\eta &= S_{3j} f_j^{(0)}\cdot\exp(-j\omega_r \sin\varphi\eta), \qquad S_{kj} f_j^{(0)} \equiv \sum_{j=1}^{4} S_{kj} f_j^{(0)},\\
H_\xi &= S_{4j}\cdot f_j^{(0)}\cdot\exp(-j\omega_r \sin\varphi\eta),\\
E_\zeta &= -\frac{\varepsilon_{\zeta\eta}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}}E_\eta - \frac{\varepsilon_{\zeta\xi}}{\varepsilon_{\zeta\zeta}}E_\xi - \frac{\alpha_\eta}{\varepsilon_{\zeta\zeta}}H_\xi, \qquad H_\zeta = \frac{\alpha_\eta}{\mu}E_\xi,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $\alpha_\eta = -\sin\varphi$, что следует из равенства тангенциальных компонентов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на границе раздела $\zeta_1 = 0$, а собственные векторы для матрицы T имеют вид

$$\begin{pmatrix} S_{1j}\\ S_{2j}\\ S_{3j}\\ S_{4j}\end{pmatrix} = (A_j F_j)^{-1/2}\begin{pmatrix} a_3 q_j + a_4\\ A_j\\ q_j A_j\\ a_5 q_j + a_6\end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{18}$$

Для слабонеоднородной среды можно ограничиться приведенным выше нулевым приближением (см. приложение) и считать выполнение неравенств

$$\frac{\lambda_0}{2\pi q_i^2}\left|\frac{\partial q_i}{\partial x}\right| \ll \frac{1}{\omega_r}, \quad \frac{\lambda_0}{2\pi q_i^2}\left|\frac{\partial q_i}{\partial y}\right| \ll \frac{1}{\omega_r}, \quad \frac{\lambda_0}{2\pi q_i^2}\left|\frac{\partial q_i}{\partial z}\right| \ll 1 \tag{19}$$

достаточным условием применимости полученного решения (17), где λ_0 — длина волны в свободном пространстве.

Выражения (16)—(18) показывают, что в слабонеоднородной анизотропной среде монохроматическая волна существует в самом общем случае в виде суперпозиции четырех невзаимодействующих волн, пространственная структура каждой из которых (16а) совпадает в основном с геометрикооптическим представлением волны в слоистых средах. Собственные значения матрицы T определяют показатели преломления для этих волн и их анализ может быть использован в теории распространения волн в неоднородных средах.

Рассмотрим некоторые примеры такого анализа. Так, известно, что в однородной или слоистонеоднородной средах волны распространяются без затухания, если тензор диэлектрической проницаемости является эрмитово сопряженным. Если среда является неоднородной по трем координатным направлениям, то в нулевом приближении затухание волн будет отсутствовать, если собственные значения матрицы T чисто действительны, т. е. если матрица T является эрмитово сопряженной ($T_{ij}=T_{ji}^{*}$). Учитывая (7), легко проверить, что условие эрмитовости тензора диэлектрической проницаемости не является достаточным условием отсутствия затухания волн в трехмерной неоднородной среде.

Далее, в общем случае матрица T имеет четыре различных по модулю собственных значения, определяемых как корни характеристического уравнения следующего вида:

$$q^4 + a_1 q^3 + (a_2 - T_{32})\, q^2 + (a_1 T_{32} + a_3 b_5 + b_3 a_5)\, q - \\ - (a_2 T_{32} + b_3 a_6 + b_5 a_4) = 0. \qquad (20)$$

Следовательно, если $a_1=0$, $a_3 b_5 + b_3 a_5 = 0$, что может быть либо при нормальном падении волны на полупространство, заполненное неоднородной средой, либо при выполнении соотношений

$$\varepsilon_{\zeta\eta} = -\varepsilon_{\eta\zeta}, \quad \varepsilon_{\zeta\xi}\varepsilon_{\xi\eta} = -\varepsilon_{\xi\zeta}\varepsilon_{\eta\xi}, \qquad (21)$$

то в этих случаях характеристическое уравнение является биквадратным, и условия распространения волн вдоль возрастания координаты ζ_1 и в обратном направлении являются идентичными и определяются двумя различными по модулю собственными значениями матрицы T. (Тогда как в общем случае этого может не быть.)

Допустим теперь, что мы имеем плазменную среду, параметры которой изменяются только по направлению ζ_1, и направление внешнего магнитного поля совпадает с направлением оси ξ_1. Тогда тензор диэлектрической проницаемости для продольного распространения имеет вид (см., например, [1])

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Полагая в (7) $\alpha_\eta = 0$, что соответствует случаю распространения вдоль оси ζ_1, и учитывая (22), получим следующие собственные значения для T:

$$q_1 = -q_2 = (\varepsilon_1 + j\varepsilon_2)^{1/2}, \\ q_3 = -q_4 = (\varepsilon_1 - j\varepsilon_2)^{1/2}, \qquad (23)$$

которые полностью совпадают с выражениями для показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн при продольном распространении их в магнитоактивной плазме [9].

Если $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$, т. е. среда является изотропной, то собственные значения матрицы T будут

$$q_1 = q_3 = (\mu\epsilon - \alpha_\eta^2)^{1/2},$$
$$q_2 = q_4 = -(\mu\epsilon - \alpha_\eta^2)^{1/2}, \tag{24}$$

что совпадает с показателями преломления, полученными в [6—8] для изотропной среды, свойства которой медленно изменяются по трем координатным направлениям.

Таким образом, в теории распространения волн в неоднородных анизотропных средах можно успешно использовать анализ собственных значений матрицы T. Если все ее собственные значения различны между собой и являются медленно меняющимися функциями координат на расстояниях порядка длины волны, то исследование распространения волн сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка (10), которое может быть ограничено получением только нулевого приближения.

Как следует из (16)—(18), монохроматическая волна, распространяющаяся в слабонеоднородной среде, может быть представлена в самом общем случае как суперпозиция четырех невзаимодействующих характеристических волн, показатели преломления которых определяются собственными значениями матрицы T.

Приложение

Для определения вида функций $c_i(\xi, \eta)$ предположим, что (16) является решением рассматриваемой задачи и должно удовлетворять системе четырех уравнений Максвелла. Тогда подстановка в них (16) с последующими несложными преобразованиями приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \mu_1 \Lambda_1(\xi, \eta, \xi)\,\vec{c}(\xi, \eta),$$
$$\frac{\partial \vec{c}(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \mu_2 \Lambda_2(\xi, \eta, \xi)\,\vec{c}(\xi, \eta), \tag{25}$$

где Λ_1, Λ_2 — некоторые матричные функции, а μ_1, μ_2 — параметры, пропорциональные $T_{ij}^{-3/2}\frac{\partial T_{ij}}{\partial \xi}$ и $T_{ij}^{-3/2}\frac{\partial T_{ij}}{\partial \eta}$.

В слабонеоднородной среде, когда неравенства (19) выполнены, параметры μ_1 и μ_2 являются малыми, и решение (25) целесообразно проводить методом последовательных приближений. В пренебрежении слабым рассеянием волн, обусловленным неоднородностью среды, можно ограничиться нулевым приближением: $\vec{c}(\xi, \eta) = \vec{c}$, где $\vec{c}$ — столбцовая матрица из произвольных постоянных.

Далее предположим, что неравенства (19) выполнены, и покажем, что в этом случае решение рассматриваемой задачи может быть ограничено нулевым приближением. Таким образом, условия (19) являются достаточным критерием применимости нулевого приближения.

Решение уравнений (5а, б) имеет вид[1]

$$\vec{e}_0 = \Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)\,\vec{c},$$
$$\vec{e}_1 = \Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}[\Omega_{\zeta_2}^{\zeta_0}(-jT)]^{-1}\,U(\vec{e}_0)\,d\zeta_2, \tag{26}$$

где $\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)$ — матрицант, нормированное решение уравнения (5а) (см., например, [10]).

Нулевое приближение пригодно, если

[1] Для оценки критерия достаточно ограничиться частным решением неоднородного дифференциального уравнения (5б).

$$\frac{1}{\omega_r}\left|\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1}[\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_2}(-jT)]^{-1}U(\vec{e_0})\,d\zeta_2\right|\ll|\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)\vec{c}| \tag{27}$$

или после умножения (27) слева на обратный матрицант и замены модуля от интеграла интегралом от модуля:

$$\frac{1}{\omega_r}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1}|[\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_2}(-jT)]^{-1}U(\vec{e_0})|\,d\zeta_2\ll E\cdot|\vec{c}|, \tag{28}$$

где E — единичная матрица.

Неравенство (28), имеющее интегральный характер, можно заменить рядом достаточно более слабых условий, выполнение которых заведомо обеспечивает выполнение неравенства (28), а именно

$$\begin{gathered}\frac{1}{\omega_r}|R_0\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)\vec{c}|\ll|\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)|\cdot|\vec{c}|,\\ \frac{1}{\omega_r}\left|R_\eta\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}\left(-j\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)\vec{c}\right|\ll|\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)|\cdot|\vec{c}|,\\ \frac{1}{\omega_r}\left|R_\xi\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}\left(-j\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)\vec{c}\right|\ll|\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(-jT)|\cdot|\vec{c}|\end{gathered} \tag{29}$$

(предполагается, что функции $T_{ij}(\xi,\eta,\xi)$ непрерывно-дифференцируемы вместе со своими производными).

Если $|P|\leqslant Q$, где P и Q — производные матрицы, то $|\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(P)|\leqslant\Omega_{\zeta_0}^{\zeta_1}(Q)$ [10]. Следовательно, выполнение неравенств (29) гарантировано, если

$$\begin{gathered}\frac{1}{\omega_r}\left|\frac{\partial T_{ij}}{\partial\xi}\right|\ll1,\quad\frac{1}{\omega_r}\left|\frac{\partial T_{ij}}{\partial\eta}\right|\ll1,\\ \frac{1}{\omega_r}\left|\frac{1}{T_{ij}}\frac{\partial T_{ij}}{\partial\xi}\right|\ll1,\quad\frac{1}{\omega_r}\left|\frac{1}{T_{ij}}\frac{\partial T_{ij}}{\partial\eta}\right|\ll1.\end{gathered} \tag{30}$$

Последние неравенства заведомо выполнены, если выполнены неравенства

$$\left|\frac{1}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\xi}\right|\ll1,\quad\left|\frac{1}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\eta}\right|\ll1, \tag{31}$$

где q_i — собственные значения матрицы T. При переходе к размерной системе координат (31) заменяются неравенствами (19). $\left(\text{Неравенство }\frac{1}{\omega_r}\left|\frac{1}{q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\zeta}\right|\ll1\text{ предполагается выполненным при получении решения в форме (16).}\right)$ Таким образом, выполнение неравенств (19) можно считать достаточным условием применимости нулевого приближения.

Автор глубоко признателен А. А. Семенову за внимание к данной работе и обсуждение ее на семинаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., Физматгиз, 1960.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
3. Försterling K. Hochfrequentech. u. Elektroakust., **59**, 10, 1942.
4. Budden K. G. Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge, 1961.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. «Успехи матем. наук», **15**, вып. 3 и 4, 1960.
6. Федоров Н. Н. «Изв. вузов», радиотехника, **7**, 85, 1964.
7. Филатова Е. А. «Изв. вузов», радиотехника, **7**, 597, 1964.
8. Стреж П. Е. «Радиотехника и электроника», № 9, 1967.
9. Ратклифф Дж. А. Магнито-ионная теория и ее приложения к ионосфере. М., ИЛ, 1962.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
20. 9 1966 г.

Кафедра
волновых процессов