

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1967

УДК 543.40

МАХМУД ХАЩАН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА ПО ИНТЕРФЕРОГРАММЕ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ—ПЕРО С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ АПЕРТУРЫ

С учетом дифракции решена задача об интерференции множества световых пучков с переменными сечениями, что имеет место при наклонном падении света на интерферометр Фабри—Перо с конечной апертурой. Определены ширина интерференционной полосы и разрешающая сила интерферометра при любом угле наблюдения. Эти величины дают также ширину резонансного контура и добротность оптического резонатора, которым является интерферометр Фабри—Перо.

В связи с большим значением интерферометра Фабри—Перо в современной спектроскопии требуется более строгое, чем обычно, рассмотрение вопроса о распределении интенсивности света и разрешающей способности в различных порядках интерференции с учетом явлений дифракции и виньетирующего действия отверстия интерферометра и всей оптической системы.

В интерференционной картине интерферометра Фабри—Перо наблюдается уменьшение интенсивности полос по направлению к краям интерферограммы. Это объясняется тем [1], что центральная полоса образуется при интерференции бесконечного числа пучков одинаковых сечений, в то время как при наклонном падении света на интерферометр интерферирует конечное число пучков с уменьшающимися сечениями, образуя нецентральные полосы. Поэтому, рассматривая интерференцию пучков разных площадей, необходимо определить отношения амплитуд соответствующих волн по отношению площадей последовательно выходящих из интерферометра пучков. В литературе определение соотношения между площадью сечения пучка и амплитудой соответствующей ему волны основано на двух предположениях. Первое предположение [2] основано на том факте, что интенсивность света пропорциональна площади какого-либо освещающего пучка. Поэтому предполагается, что амплитуда прямо пропорциональна квадратному корню площади пучка. Правда, амплитуда не обязательно выражается квадратным корнем, а она может быть выражена другими математическими выражениями, которые могут привести к интенсивности, пропорциональной площади светового пучка. По другому предположению [3], пучок разделен на равные участки и в зависимости от его расположения по входной апер-

туре каждый участок совершает большее или меньшее число отражений, перед тем как достигнуть края выходной апертуры. Это предположение основано на том, что амплитуда прямо пропорциональна самой площади. Соотношение между площадью пучка и амплитудой соответствующей волны лежит в основе теории дифракции. Ниже эти предположения будут обсуждаться более подробно.

Входящий в интерферометр световой пучок

Точки источника света J , помещенного в фокальной плоскости линзы L_1 (рис. 1), являются некогерентными источниками параллельных пучков, идущих в разных направлениях относительно оптической оси линзы L_1 . Положения точек источника и направления пучков определяются углом φ главных лучей, которые, проходя через центр линзы L_1 , описывают вокруг ее оптической оси конус с раствором 2φ . В рис. 1 нормаль к интерферометру совпадает с оптической осью освещающей системы и плоскость отражения падающего под углом φ пучка совпадает с плоскостью чертежа. Крайние точки испускают пучки в направлении φ_0 . То, что свет распространяется в определенном направлении в виде так называемого пучка или луча, представляет собой понятие геометрической оптики. Однако если учитывать дифракцию, то параллельный световой пучок конечного сечения представляется совокупностью плоских волн, распространяющихся в разных направлениях с разными амплитудами. Амплитуды этих волн уменьшаются по мере отклонения от того геометрического направления, в котором распространяется волна с максимальной амплитудой. Теория дифракции позволяет вычислить волновую структуру светового пучка. Волновой состав параллельного пучка в случае прямоугольного сечения описывается выражением [4].

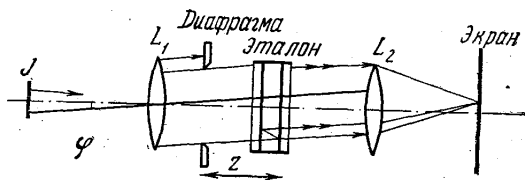


Рис. 1. Источник света J , протяженный в фокальной плоскости линзы L_1 , z — расстояние между диафрагмой и задним зеркалом эталона, L_2 — изображающая интерференционные кольца линза с фокусным расстоянием f_2

$$s = A \frac{\cos \varphi}{\lambda} \sqrt{B_0} dw d\varphi \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} \theta}{\frac{\pi a}{\lambda} \theta} \frac{\sin \frac{\pi b \cos \varphi}{\lambda} \beta}{\frac{\pi b \cos \varphi}{\lambda} \beta} e^{i \left(\Phi' + \frac{\pi a}{\lambda} \theta + \frac{\pi b \cos \varphi}{\lambda} \beta \right)}, \quad (1)$$

где a и b — стороны сечения пучка, $ab = A$ — площадь сечения пучка, φ и β — углы падения и дифракции в плоскости, содержащей сторону b и оптическую ось, θ и θ — углы падения и дифракции в плоскости, перпендикулярной предыдущей, λ — длина световой волны, B_0 — яркость источника света. Сокращенно (1) можно записать в виде

$$s = AB e^{i \left(\Phi' + \frac{\pi a}{\lambda} \theta + \frac{\pi b \cos \varphi}{\lambda} \beta \right)}, \quad (1')$$

где AB дает распределение амплитуд в пространстве вокруг направления геометрического распространения. В дальнейшем воспользуемся выражением (1') для светового колебания дифрагировавшего света.

Световые пучки, выходящие из интерферометра Фабри—Перо

При прохождении через интерферометр Фабри—Перо и многократных отражениях между обращенными друг к другу плоско-параллельными полупрозрачными зеркалами амплитуды светового колебания уменьшаются.

Во-первых, за счет потерь при отражении вследствие поглощения в отражателе и прохождения через него. Величины отражения и пропускания определяются коэффициентами ρ и ρ' для амплитуды и $R (= \rho^2)$ и $\Phi (= \Phi'^2)$ для интенсивности, которые связываются между собой соотношением $R + \Phi + \chi = 1$, где χ — коэффициент поглощения зеркал для интенсивности.

Во-вторых, за счет уменьшения сечения пучков [1]. Попеременно отражаясь от зеркала к зеркалу, пучки света, падающие на зеркало под некоторым углом φ , смещаются в плоскости отражения от центра к краям интерферометра, и при этом они испытывают виньетирование (см. рис. 1). Таким образом, сечения выходящих из интерферометра пучков приобретают последовательно уменьшающиеся значения. Будучи эквивалентным апертуре, которая все время сужается, интерферометр Фабри—Перо пропускает в направлении ψ последовательность световых колебаний с уменьшающимися амплитудами и запаздывающими фазами:

$$S_{\psi} = \Phi \sum_{j=1}^N A_j B_j R^{j-1} e^{-i\Phi_j} e^{i(\Phi' + \frac{\pi a}{\lambda} \theta)} \quad (2)$$

где

$$\Phi_j = (j-1)\Phi_0 - \frac{\pi}{\lambda} \beta b_j \cos \varphi, \quad (3)$$

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \gamma + \delta_1 + \delta_2, \quad \gamma = 2h \cos \varphi, \quad \psi = \varphi + \beta,$$

γ — величина разности хода интерферирующих волн, h — расстояние между зеркалами, δ_1 и δ_2 — скачки фаз на отражающих зеркальных поверхностях.

Вследствие дифракции все смежные точки, которые лежат в направлениях, отклоняющихся от направления ψ на угол $\beta = \psi - \varphi$, посылают в направлении ψ множества колебаний с изменяющимися в зависимости от β амплитудами. При помощи линзы L_2 (см. рис. 1) с фокусным расстоянием f_2 и диаметром, большим размера зеркал интерферометра, все выходящие из интерферометра пучки N собираются в фокальной плоскости линзы L_2 , в точке, отстоящей от оптической оси на расстоянии $r = f_2 \tan \psi$. Так как амплитуды от смежных точек излучателя некогерентны, то интенсивность света, пропускаемого интерферометром в направлении ψ , определяется следующим выражением:

$$I_{\psi} = \iint_{\omega} S_{\psi} S_{\psi}^*,$$

где S^* — величина комплексно-сопряженная S , а интегрирование ведется в пределах $-\omega_0, \omega_0$ и $-\omega_0, \omega_0$.

Вычислим интенсивность I_{ψ} для интерферометра с отверстием в виде прямоугольника со сторонами a и b , при этом будем считать, что

пучок перемещается при отражении вдоль направления, параллельного стороне b . Кроме этого разберем 3 случая различных значений ширины диафрагм перед и за интерферометром. Во всех случаях диафрагмы считаются прямоугольными со сторонами, параллельными сторонам интерферометра. Центры диафрагм и интерферометра лежат на оптической оси освещающей системы.

Распределение интенсивности в случае, когда размеры входящего пучка равны размерам зеркал интерферометра

В рассматриваемом случае диафрагма со сторонами a и b , равными сторонам зеркал интерферометра, стоит перед интерферометром на расстоянии z от его заднего зеркала.

В данном случае величины A_j , b_j и B_j в (2) можно записать

$$A_j = ab_j, \quad b_j = \{b - [z + 2(j-1)h] \operatorname{tg} \varphi\},$$

$$B_j = \frac{\cos \varphi}{\lambda} \sqrt{B_0} d\omega d\varphi \frac{\sin \frac{\pi a}{\lambda} \theta}{\frac{\pi a}{\lambda} \theta} \frac{\sin \frac{\pi b_j \cos \varphi}{\lambda} \beta}{\frac{\pi b_j \cos \varphi}{\lambda} \beta}.$$

Число интерферирующих пучков определяется неравенством

$$N \geq \frac{b - z \operatorname{tg} \varphi}{2h \operatorname{tg} \varphi} > (N - 1).$$

Если в (3) заменить пределы интегрирования бесконечностью и ввиду малости угла дифракции при сравнительно широких пучках считать, что $\cos \varphi \approx \cos \psi$, то после некоторых преобразований получим

$$I_\psi = \vartheta^2 B_0 \cos \varphi^a \left\{ \sum_{j=1}^N b_j R^{2(j-1)} + 2 \sum_{j=2}^N R^{-(j-1)} \cos(j-1) \Phi_0 \sum_{n=j}^N b_n R^{2(n-1)} \right\}. \quad (4)$$

Вводя обозначения

$$T_\infty = \frac{1}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\Phi_0}{2}}$$

$$T_N = \frac{(1-R^N)^2 + 4R^N \sin^2 N \frac{\Phi_0}{2}}{(1-R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\Phi_0}{2}}$$

получим из (4) конечную формулу для интенсивности света, пропускаемого интерферометром Фабри—Перо в направлении ψ :

$$I_\psi = AB_0 \vartheta^2 \cos \psi \left\{ \left(1 - \frac{z}{b} \operatorname{tg} \psi - \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \varphi \frac{1-R^{2N}}{1-R^2} \right) T_\infty + \right. \\ \left. + \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \psi \frac{1-R^2(T_N + T_{N-1})}{1-R^2} + \right. \\ \left. + \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \psi \frac{T_\infty}{1-R^2} [T_2 + R^2(T_{N-1} - R^2 T_{N-2}) - (T_{N+1} - R^2 T_N)] \right\}. \quad (5)$$

При помощи (5) можно вычислять как дисперсионные, так и резонансные характеристики интерферометра Фабри—Перо.

При нормальном падении света, т. е. когда $\psi = 0$, (5) даст известную функцию Эри: $I_0 = AB_0 \Phi^2 T_\infty$.

В (5) функции T_N , T_{N+1} , T_{N-1} и T_{N-2} описывают побочные полосы. Угловое расстояние между двумя побочными полосами равно

$$(d\psi)_N \cong \frac{\lambda}{b} \sin^2 \psi.$$

Если $b = 5$ см, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, $\sin \psi = 10^{-2}$, то $(d\psi)_N \cong 10^{-9}$ радиан. Если $\sin \psi = 10^{-1}$, $d(d\psi)_N = 10^{-7}$ радиан. Отношение интенсивности побочной полосы J_N к интенсивности I_0 главной полосы дается формулой

$$\frac{J_N}{I_0} \cong \frac{4R^{N+2}}{N(1-R^2)}.$$

Таким образом, побочные полосы настолько узки и слабы, что они практически ненаблюдаемы. Следовательно, можно подставить средние значения интенсивностей побочных полос и пренебречь членами с R^{2N} в (5). При этом выражение для распределения интенсивности упрощается:

$$I_\psi = I_0 \cos \psi \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \psi}{2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \psi \frac{2R + R^2}{1 - R^2} + \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \psi \frac{4R}{1 - R^2} \left(RT_\infty \sin^2 \Phi_0 + \sin^2 \frac{\Phi_0}{2} \right) \right]. \quad (6)$$

В этом выражении величина $2 \operatorname{tg} \alpha = b/z$ называется относительным отверстием интерферометра, где 2α — угол, под которым видно зеркало интерферометра из центра освещающего конденсора.

В выражении (5) функции T_∞ и T_2 симметричны относительно своих максимальных значений, в то время как $\operatorname{tg} \psi$ и $\cos \psi$ имеют различные значения по обеим сторонам на одинаковых расстояниях от положения максимальных значений функции T_∞ и T_2 . Это приводит к искажению интерференционных полос. Такое искажение более существенно у интерферометра с небольшими толщинами между его зеркалами, когда угловая протяженность полосы велика.

Выражение для максимальной интенсивности в близких к центру интерферограммы участках получается при подстановке в (6) $\Phi_0 = 2k\pi$, где k — целое число:

$$\frac{I_{\psi_k}}{I_{0\max}} = P = \cos \psi_k \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \psi_k}{2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \psi_k \frac{2R + R^2}{1 - R^2} \right). \quad (7)$$

Последнее выражение показывает, что максимальная интенсивность, пропускаемая интерферометром Фабри—Перо при наклонном падении на него, меньше максимальной интенсивности при нормальном падении. Из выражения (7) следует, что I_{ψ_k} уменьшается по сравнению с $I_{0\max}$, не только при переходе по интерферограмме от центра к краям, но и с увеличением коэффициента отражения R и отношения расстояния h к размерам зеркал. Величина P , определяемая выражением (7), показана графически на рис. 2 и 3 в зависимости от $\operatorname{tg} \psi$ при различных значениях коэффициента отражения R и отношения толщины интерферометра к размеру его зеркал h/b . Эта кривая почти совпадает с прямой

с наклоном $-\left(\frac{z}{b} + \frac{2h}{b} \frac{2R + R^2}{1 - R^2}\right)$ при малых ψ .

Условие $I_\psi = \frac{1}{2} I_{\psi_k}$, которое обычно берется как критерий предела разрешения, выполняется для значения ε приращения фазы в окрестности максимума. Вводя это условие в (6), имея в виду малость изменения I_{ψ_k} при малом приращении угла ψ и обозначая

$$\varepsilon_0 = \frac{1 - R}{2\sqrt{R}}, \quad (8)$$

$$C = \frac{\cos \psi}{P} \frac{2h}{b} \operatorname{tg} \psi \frac{1 + R}{1 - R}, \quad (9)$$

получим

$$\varepsilon = [C + \sqrt{1 + C^2}]^{1/2} \cdot \varepsilon_0. \quad (10)$$

Из последнего уравнения следует, что интерференционные полосы при переходе к краям интерферограммы становятся более широкими, чем центральная полоса. Из (7), (8) и (9) для P , ε_0 и C и из (10) видно, что полосы расширяются не только с увеличением угла наблюдения, но

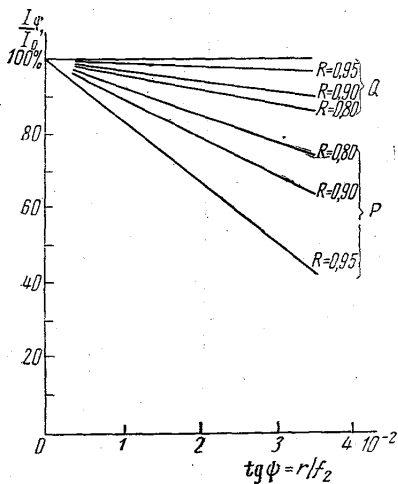


Рис. 2. Зависимость отношений нецентральных интенсивностей к интенсивности в центре P и Q от $\operatorname{tg} \psi$ при разных коэффициентах отражения: I — теоретическая предельная интенсивность, $b=5$, $h=1$, $z=25$ см

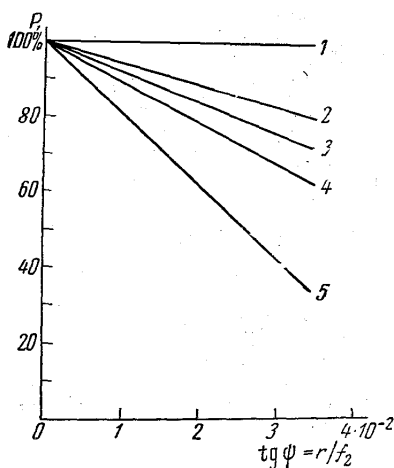


Рис. 3. Зависимость P от $\operatorname{tg} \psi$ при разных расстояниях между зеркалами интерферометра: I — теоретическая предельная интенсивность, $b=5$, $z=25$, $R=0,90$, $2-h=0,1$, $3-h=0,5$, $4-h=1$, $5-h=2,5$ см

и при увеличении коэффициента отражения. Следовательно, нецентральные полосы не сужаются с увеличением коэффициента отражения, как это следует из формулы (8) при интерференции бесконечного числа пучков. На рис. 4 представлено изменение относительного расширения $(\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon_0$, вычисляемое из (10) в зависимости от $\operatorname{tg} \psi$ при различных значениях коэффициента отражения.

Дифференцируя выражение (3), можно вычислить величины, характеризующие разрешающую способность интерферометра. Угловая величина ширины полосы равна

$$2(\delta\psi)_\psi = \frac{\lambda}{2h \sin \psi} [C + \sqrt{1+C^2}]^{1/2} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}},$$

и предел разрешения

$$(\delta\lambda)_\psi = \frac{\lambda^2}{2h \cos \psi} [C + \sqrt{1+C^2}]^{1/2} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} = \frac{\Delta\lambda}{\bar{N}_\psi},$$

где $\Delta\lambda$ — спектральная величина свободной области дисперсии, \bar{N}_ψ — острота интерференционной полосы или действительное эффективное число равных интерферирующих пучков, которые относятся к интенсивности нецентральных полос

$$\bar{N}_\psi = [C^2 + \sqrt{1+C^2}]^{-1/2} \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\bar{N}_0}{[C + \sqrt{1+C^2}]^{1/2}},$$

где \bar{N}_0 — эффективное число равных интерферирующих пучков при нормальном падении на интерферометр Фабри—Перо. Число \bar{N}_ψ меньше теоретического предельного значения \bar{N}_0 . \bar{N}_ψ уменьшается с увеличением угла наблюдения ψ и толщины интерферометра Фабри—Перо. Ход уменьшения \bar{N}_ψ представлен на рис. 5. Число \bar{N}_ψ резко падает с

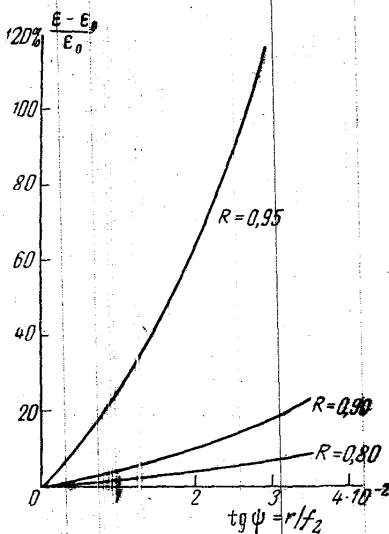


Рис. 4. Зависимость относительно-го фазового расширения $\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0}$ в процентах от $\text{tg } \psi$ при разных коэффициентах отражения, $b=5$, $h=1$, $z=25$ см

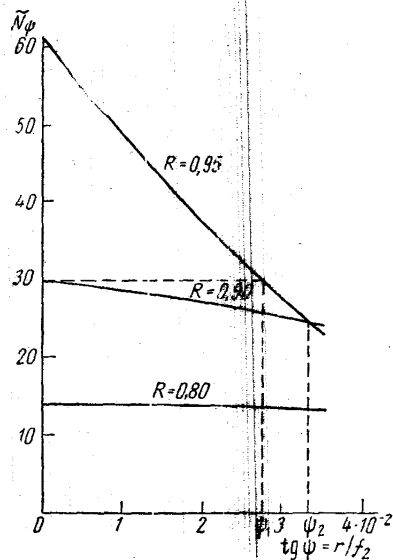


Рис. 5. Зависимость эффективного числа равных интерферирующих пучков \bar{N}_ψ от $\text{tg } \psi$ при разных коэффициентах отражения, $b=5$, $h=1$, $z=25$ см

увеличением ψ при увеличении коэффициента отражения. При наклонном падении света интерферометр Фабри—Перо ведет себя как интерферометр с зеркалами, имеющими меньший коэффициент отражения, нежели действительный коэффициент отражения зеркальных слоев. На рис. 5 показано, что под некоторыми углами от ψ_1 до ψ_2 интерферометр с $R=0,95$ эквивалентен такому же интерферометру, но с $R=0,90$. При

угле ψ_2 значения N_ψ совершенно совпадают. Но при больших ψ интерферометр с большим отражением уступает интерферометру с меньшим отражением. Короче говоря, все свойства интерферометра, зависящие от \bar{N}_ψ , ухудшаются в нецентральных участках интерферограммы, где разрешающая сила равна

$$P_{n\psi} = \frac{2h \cos \psi}{\lambda} \bar{N}_\psi. \quad (11)$$

Будучи оптическим резонатором, интерферометр Фабри—Перо имеет добротность, которая для угла распространения электромагнитных волн внутри резонатора ψ дается выражением (11).

Отношение I_{ψ_k} к минимальной интенсивности $I_{\psi_{k+\frac{1}{2}}}$ берется за контрастность K_ψ изображения, даваемого интерферометром. В нашем случае $I_{\psi_{k+\frac{1}{2}}}$ получится из (6) при подстановке $\Phi_0 = (2k+1)\pi$:

$$\frac{I_{\psi_{k+\frac{1}{2}}}}{I_{\text{оmin}}} = Q = \cos \psi \left(1 - \frac{\text{tg } \psi}{2 \text{tg } \alpha} + \frac{2h}{b} \text{tg } \psi \frac{|2R - R^2|}{1 - R^2} \right). \quad (12)$$

По определению контрастности, сочетание выражений (7) и (12) дает

$$K_\psi = \frac{P}{Q} K_0, \quad \text{где } K_0 = \left(\frac{1+R}{1-R} \right)^2, \quad (13)$$

т. е. K_0 — контрастность интерферограммы, которая получалась бы при интерференции бесконечных чисел пучков. В центре интерференционной картины контрастность приобретает наибольшее значение K_0 . Затем она уменьшается с увеличением угла падения света на интерферометр, толщины интерферометра и коэффициента отражения. Величина Q изображена графически на рис. 2 в зависимости от $\text{tg } \psi$ при различных R . Из рис. 2 может быть также получена контрастность K_ψ , так как почти параллельная оси ординат прямая пересекает кривые P и Q в точках, отношение ординат которых дают значения величины K_ψ . Поэтому расхождение между обеими кривыми P и Q считается мерой контрастности. Чем больше расхождение, тем меньше контрастность. Из того же рисунка видно, что чем больше R , тем больше расхождение, т. е. тем меньше контрастность. Следовательно, отчетливость интерференционной картины далеко от ее центра не улучшается с увеличением коэффициента отражения, как это предполагается формулой (13).

Автор благодарит проф. Ф. А. Королева за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толанский С. Спектроскопия высокой разрешающей силы. М., ИЛ, 1955.
2. Gieger F. E. J. Opt. Soc. Am., **39**, No. 3, 249, 1949.
3. Vander Sluis K. L., Mc Nally J. R. J. Opt. Soc. Am., **46**, No. 1, 39, 1956.
4. Королев Ф. А. Спектроскопия высокой разрешающей силы. М., Гостехиздат, 1953.

Поступила в редакцию
5. 11 1966 г.

Кафедра оптики