Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1967

УДК 539.121.3

Г. Н. ШИКИН

К ВОПРОСУ О ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассматривается нелинейное уравнение скалярного поля без массового члена с нелинейным членом по функции третьей степени. Показано, что рассматриваемое уравнение имеет только нестационарные комплексные квазичастицеподобные решения.

Рассматривается нелинейное уравнение скалярного поля без массового члена с нелинейным членом по функции третьей степени. Действительные сферически симметричные решения этого уравнения подробно рассмотрены во многих работах. В настоящей работе исследуется вопрос о существовании нестационарных решений, которые дают конечное значение для величины энергии поля, не имеют особенностей в нуле, определены для всех точек (x, y, z, t), всюду в пространстве непрерывны для всех произвольных моментов времени t и монотонно убывают на бесконечности, переходя при этом в решение соответствующего линейного уравнения. Нестационарные решения расплываются со временем, поэтому к частицеподобным не относятся. Рассматриваются следующие типы решений — действительное волновое решение, зависящее от аргумента $s=\sqrt{r^2-t^2}$, и комплексное нестационарное решение, содержащее мнимый параметр. Комплексное нестационарное решение расплывается со временем медленнее, чем действительное волновое решение. Если мнимый параметр, входящий в решение, достаточно велик, то мы получаем почти стабильное решение. Такие решения можно назвать метастабильными или квазичастицеподобными.

Функция Лагранжа для рассматриваемого уравнения имеет вид

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2-\frac{\lambda}{4}\varphi^4. \tag{1}$$

Из (1) получаем уравнение для $\varphi(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}+\lambda\varphi^3=0. \tag{2}$$

Решение ищем в виде

$$\varphi(x, y, z, t)=\varphi(s),$$

где $s=\sqrt{r^2-t^2}$. Для $\varphi(s)$ получаем уравнение

$$\varphi''+\frac{3}{s}\varphi'+\lambda\varphi^3=0. \qquad (3)$$

При $s\to\infty$ уравнение (3) для убывающих решений переходит в уравнение для свободного поля, которое имеет решение вида

$$\varphi(s)=\frac{c}{s^2}. \qquad (4)$$

Из возможных решений уравнения (3) оставляем только те, которые имеют асимптотическое поведение при $s\to\infty$ вида (4). Уравнение (3) имеет частное точное решение вида

$$\varphi(s)=\frac{c}{\sqrt{\lambda}\,s}. \qquad (5)$$

Это решение имеет разрыв в точке $r^2=t^2$ и неопределено для точек, удовлетворяющих условию $t^2>r^2$, т. е. оно не приводит к конечному значению для величины энергии поля. Асимптотическое поведение решения (5) при $s\to\infty$ не совпадает с решением (4) для свободного поля, поэтому оно не относится к классу разыскиваемых решений.

Рассмотрим еще одно точное решение уравнения (4). Для этого перейдем к новой функции $\varphi(s)=\left(\frac{1}{\xi}\right)^{1/2}\vartheta\left(\ln\frac{1}{\xi}\right)$, где $\xi=\lambda s^2$. Получаем уравнение для $\vartheta(t)$, где $\ln\frac{1}{\xi}=t$:

$$\vartheta''-\frac{1}{4}\vartheta+\vartheta^3=0.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{c_1+\frac{1}{4}\vartheta^2-\frac{1}{2}\vartheta^4}}=t+c_2.$$

Если $c_1\neq0$, то получаем решение в виде эллиптической функции. Рассмотрим случай, когда $c_1=0$. Тогда получим следующее решение:

$$\varphi(s)=\frac{2c}{\lambda s^2+c^2}. \qquad (6)$$

Это решение имеет асимптотическое поведение типа (4), но имеет разрыв при $\lambda(r^2-t^2)=-c^2$, т. е. оно не может дать конечного значения для величины энергии поля. Рассмотрим аналитическое продолжение в комплексную плоскость решения (6). Введем функцию от комплексного аргумента $s=\sqrt{r^2-(t-i\beta)^2}$. Тогда из (6) получаем

$$\varphi=\frac{2c}{\lambda\left[r^2-(t-i\beta)^2\right]+c^2}. \qquad (7)$$

Решение (7) можно представить в виде

$$\varphi=\frac{2c}{R}e^{-i\theta}, \qquad (8)$$

где $R = \{[\lambda(r^2 - t^2 + \beta^2) + c^2]^2 + 4\lambda^2\beta^2 t^2\}^{1/2}$,

$$\cos\theta = \frac{\lambda(r^2 - t^2 + \beta^2) + c^2}{R}, \quad \sin\theta = \frac{2\lambda\beta t}{R}.$$

Из (8) видно, что если $\beta \neq 0$, то решение (7) существует при любых r и t и всюду непрерывно. Комплексное нестационарное решение (7) является решением уравнения (3), записанного для действительных функций. Легко показать, что решение (7) приводит к действительному значению для величины энергии поля. В функцию Лагранжа (1) время явно не входит, поэтому для любых решений энергия поля есть постоянная величина, не зависящая от времени.

$$E = \int T^{00}\, dV = \text{const}.$$

Энергию поля E можно рассчитать для любого момента времени t, при этом исчезнут все члены, содержащие t. Параметр $i\beta$ входит в решение только в комбинации с t вида $2i\beta t$. Поскольку все члены, содержащие t, исчезают при интегрировании, то в конечный результат не войдет и $i\beta$, т. е. энергия поля E будет действительной постоянной величиной. Видно также, что при $t=0$ решение (7) становится действительной функцией, т. е. если рассчитать $E = \int T^{00} dV$ при $t=0$, то мы получим действительную постоянную величину для E. Энергия поля E рассчитывается из соотношения

$$E = \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right\} dV. \tag{9}$$

Если T^{00} представить в виде

$$T^{00} = T_1^{00} + iT_2^{00},$$

где T_1^{00} и T_2^{00} — действительные функции, то в результате интегрирования получим, что

$$i \int T_2^{00}\, dV = 0.$$

Несмотря на то что комплексное нестационарное решение дает действительное значение для величины энергии поля, функция Лагранжа (1) для таких решений является комплексной функцией. Для того чтобы функция Лагранжа была действительной функцией, ее можно определить следующим образом:

$$L_{\text{полн}} = L + \overset{*}{L}, \tag{10}$$

где $\overset{*}{L}$ — комплексно-сопряженная функция L. Тогда T^{00} будет действительной функцией. L дает уравнение для $\varphi(s)$, $\overset{*}{L}$ — для $\overset{*}{\varphi}(s)$. Функция Лагранжа, определенная таким образом, неинвариантна относительно градиентного преобразования первого рода. Отсюда следует, что комплексные нестационарные решения не могут описывать заряженных частиц. В этом случае энергия поля определяется из соотношения

$$E = \int \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\overset{*}{\varphi}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + (\nabla\varphi)^2 + (\nabla\overset{*}{\varphi})^2 \right] - \frac{\lambda}{4} (\varphi^4 + \overset{*}{\varphi}{}^4) \right\} dV.$$

Для величины энергии поля получаем следующую величину:

$$E = \frac{\pi c^4}{4\sqrt{\lambda}(\lambda\beta^2 + c^2)^{5/2}} .$$

Из рассмотренного следует, что полученное решение (7) является квазичастицеподобным. Установим физический смысл параметра β. Можно считать, что время, в течение которого $\overset{*}{\varphi\varphi}$ в точке $r=0$ от момента $t=0$ уменьшается в два раза, есть среднее время существования распадающейся частицы. Для линейных уравнений это время определяется только параметром β. Для полученного решения нелинейного уравнения оно определяется из соотношения

$\tau = \frac{t}{c}$ (c — скорость света), где

$$t^2 = \frac{c^2 - \lambda\beta^2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sqrt{(c^2 - \lambda\beta^2)^2 + (c^2 + \lambda\beta^2)^2},$$

т. е. зависит еще от постоянной при нелинейном члене и выбора начальных условий. Если начальные условия выбрать так, что $\lambda\beta^2 = c^2$, то $t = \sqrt{2}\beta$. В этом случае $\tau = \frac{\sqrt{2}\beta}{c}$, т. е. как и в линейном случае определяются только параметром β.

ЛИТЕРАТУРА

1. Synge I. L. Proc. Roy. Soc., A, 283, 14, 1965.
2. Иваненко Д. Д., Курдгелаидзе Д. Ф. ЖЭТФ, 40, 1072, 1961.
3. Иваненко Д. Д., Курдгелаидзе Д. Ф. «Изв. вузов», сер. физич., № 3, 109, 1961.
4. Шикин Г. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 1967.

Поступила в редакцию
13. 11 1966 г.

Кафедра
теоретической физики