Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1967

УДК 521.401

Е. П. АКСЕНОВ

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ

Выведены формулы, описывающие все возможные ограниченные решения несимметричного случая обобщенной задачи двух неподвижных центров. Приводятся также формулы для определения постоянных интегрирования по начальным условиям.

§ 1. Постановка задачи

Обобщенная задача двух неподвижных центров описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{1}$$

где силовая функция W дается формулой

$$W = \frac{fm}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2}\right\}, \tag{2}$$

в которой

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2,$$

$$r_2^2 = x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2,$$

f, m, c, σ — некоторые вещественные постоянные, а $i = \sqrt{-1}$.

Как было показано в работе [1], числовые значения постоянных f, m, c и σ можно выбрать таким образом, чтобы функция W давала хорошее приближение для силовой функции Земли.

В работе [2] были изучены ограниченные решения этой задачи в случае $\sigma = 0$. В настоящей статье мы рассмотрим случай $\sigma \neq 0$.

Дифференциальные уравнения (1) интегрируются до конца, если, например, воспользоваться переменными ξ, η, w и τ, связанными с x, y, z и t формулами

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}\sin w, \\ z &= c\sigma + \xi\eta, \end{aligned} \tag{3}$$

$$dt = (\xi^2 + c^2\eta^2)\, d\tau. \tag{4}$$

Первые интегралы дифференциальных уравнений, записанных в новых переменных, имеют вид

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 = F(\eta), \quad \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 = \Phi(\xi), \tag{5}$$

$$\frac{(\xi^2+c^2)(1-\eta^2)}{\xi^2+c^2\eta^2}\frac{dw}{d\tau} = c_1, \tag{6}$$

где

$$F(\eta) = -2hc^2\eta^4 + 2(c_2+hc^2)\eta^2 + 2fmc\sigma\eta(\eta^2-1) - (2c_2+c_1^2),$$

$$\Phi(\xi) = 2h\xi^4 + 2fm\xi^3 + 2(c_2+hc^2)\xi^2 + 2fmc^2\xi + c^2(2c_2+c_1^2).$$

Здесь h, c_1, c_2 — постоянные интегрирования.

Если V — скорость движущейся точки, то интеграл энергии запишется в виде

$$V^2 = \frac{2fm(\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2+c^2\eta^2} + 2h. \tag{7}$$

Интегралы (5) и (6) вместе с уравнением (4) полностью решают задачу. Действительно, после того как из уравнений (5) будут найдены η и ξ как функции τ, из уравнения (6) можно будет найти w как функцию τ, а уравнение (4) позволит связать время t с переменной τ.

§ 2. Новые постоянные

Анализируя интеграл энергии (7), видим, что ограниченные движения в этой задаче будут только в случае $h<0$. При этом условии легко доказывается, что многочлен $\Phi(\xi)$ обязательно имеет два действительных положительных корня, а многочлен $F(\eta)$ — два корня, лежащих в отрезке $[-1, 1]$. Пусть $a(1-e)$ и $a(1+e)$ означают эти два корня $\Phi(\xi)$, а δ — наибольший корень $F(\eta)$ из отрезка $[-1, 1]$. Тогда получим

$$F(\delta) = 0, \quad \Phi[a(1-e)] = 0, \quad \Phi[a(1+e)] = 0. \tag{8}$$

Кроме того,

$$a > 0, \quad 0 \leqslant e < 1, \quad \delta < 1. \tag{9}$$

Равенства (8) можно рассматривать, как три уравнения относительно неизвестных h, c_1^2, c_2. Решая эти уравнения, которые являются линейными относительно этих величин, выразим постоянные h, c_1 и c_2 через новые постоянные a, e и δ. Выражения для h, c_1, c_2, однако, будут несколько громоздкими. Поэтому мы представим их в виде рядов по степеням параметра $\varepsilon = c/a(1-e^2)$ и параметра σ, которые в случае практических приложений являются малыми величинами, имеющими один и тот же порядок [2].

В дальнейшем оказывается удобным вместо δ ввести другую постоянную s согласно равенству:

$$\delta = s - \varepsilon\sigma(1-s^2)[1 - \varepsilon\sigma s - \varepsilon^2(3 - 4s^2 + e^2)]. \tag{10}$$

При этом $0 \leqslant s \leqslant 1$. Поэтому если условиться, что $0 \leqslant i \leqslant \pi$, то можно ввести угол i по формуле

$$s = \sin i, \tag{11}$$

Разрешая уравнения (8), окончательно получим

$$2h = -\frac{fm}{a}\{1 - \varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) + \varepsilon^4 s^2(1-s^2)(1-e^2)(3+e^2)\}, \tag{12}$$

$$c_1 = \cos i \sqrt{fma(1-e^2)}\Big\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}[2-3s^2+e^2(2-s^2)] + \frac{\varepsilon^2\sigma^2}{2}(1-7s^2) - \\ - \frac{\varepsilon^4}{8}[(12s^2-11s^4)+e^2(16+16s^2-34s^4)+e^4(4s^2-3s^4)]\Big\}, \tag{13}$$

$$2c_2 = -fma(1-e^2)\{1+2\varepsilon^2(1+e^2)(1-s^2)+ \\ +\varepsilon^4(1-s^2)[(1-6s^2)-e^2(2+8s^2)+e^4(1-2s^2)]\}. \tag{14}$$

Здесь отброшены все члены, имеющие порядок ε^6 (или σ^6) и выше. Поскольку c_1 является постоянной площадей, то при $0 \leqslant i < \frac{\pi}{2}$ мы получим прямые движения, а в случае $\frac{\pi}{2} < i \leqslant \pi$ — движения обратные.

§ 3. Формулы для коorинат η и ξ

Так как $F(\eta)$ и $\Phi(\xi)$ являются многочленами четвертой степени, то определение координат η и ξ сводится к обращению эллиптических квадратур. Подобную операцию в случае $\sigma=0$ мы проделали в работе [2]. Но поскольку случай $\sigma\neq 0$ мало отличается от случая $\sigma=0$, то ограничимся тем, что приведем окончательные результаты.

Для координаты η имеем

$$\eta = \frac{s\sin\varphi+\gamma}{1+d\sin\varphi}, \tag{15}$$

где

$$\varphi = am(l_1, k_1), \quad l_1 = \sigma_1(\tau+c_3). \tag{16}$$

Здесь c_3 — постоянная интегрирования,

$$\gamma = -\varepsilon\sigma\{1-2s^2-\varepsilon^2[(3-12s^2+10s^4)+e^2(1-2s^4)]\}, \tag{17}$$

$$d = \varepsilon\sigma s\{1-\varepsilon^2[(5-6s^2)-e^2(1-2s^2)]\}, \tag{18}$$

$$k_1^2 = \varepsilon^2 s^2\{1+\sigma^2-e^2-4\varepsilon^2(1-s^2)(1-e^2)\}, \tag{19}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{fma(1-e^2)}\Big\{1+\frac{\varepsilon^2}{2}(1-s^2)(3+e^2)+\frac{\varepsilon^2\sigma^2}{2}(6-7s^2)- \\ -\frac{\varepsilon^4}{8}(1-s^2)[(9+11s^2)+e^2(6+34s^2)+e^4(1+3s^2)]\Big\}. \tag{20}$$

Аналогичным образом для координаты ξ найдем

$$\xi = a\frac{(1-e\bar{e})+(\bar{e}-e)\cos\psi}{1+\bar{e}\cos\psi}, \tag{21}$$

где

$$\psi = am(l_2, k_2), \quad l_2 = \sigma_2(\tau+c_4). \tag{22}$$

Здесь c_4 — постоянная интегрирования,

$$\bar{e} = e\{1+\varepsilon^2(1-e^2)(1-2s^2)+\varepsilon^4(1-e^2)[3-16s^2+14s^4-2e^2(1-s^2)^2]\}, \tag{23}$$

$$k_2^2 = \varepsilon^2 e^2 \{s^2 - \varepsilon^2 (1 - 10s^2 + 11s^4 + e^2 s^4)\}, \tag{24}$$

$$\sigma_2 = \sqrt{fma(1-e^2)} \left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(3 - 4s^2 - e^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^4}{8}[(9 - 72s^2 + 64s^4) + e^2(2 - 40s^2 + 48s^4) + e^4]\right\}. \tag{25}$$

Переменные φ и ψ связаны с переменной τ уравнениями (16) и (22). Если из этих уравнений исключим τ, то установим зависимость между φ и ψ. Окончательно эту зависимость можно представить в виде

$$\varphi = (1 + \nu)\psi + \omega - \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \nu + \frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2\psi + \frac{3}{256}k_2^4 \sin 4\psi +$$

$$+ \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2\zeta,$$

$$+ \frac{k_1^4}{256}\sin 4\zeta - \frac{k_1^2 k_2^2}{32}\sin 2\psi \cos 2\zeta, \tag{26}$$

где

$$\zeta = (1 + \nu)\psi + \omega, \tag{27}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(1 + \sigma^2)(12 - 15s^2) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{64}[288 - 1296s^2 + 1035s^4 - e^2(144 + 288s^2 - 510s^4)], \tag{28}$$

$$\omega = \sigma_1(c_3 - c_4)\left(1 + \frac{k_1^2}{4} + \frac{9}{64}k_1^4\right)^{-1}. \tag{29}$$

Постоянная ω может рассматриваться как постоянная интегрирования.

§ 4. Формула для координаты w

Поскольку ξ и η как функции τ нам известны, то уравнение (6) позволяет найти и координату w. Вычисление интегралов, связанных с нахождением w, аналогично тому, как это делалось в работе [2]. Поэтому окончательно получим

$$w = \mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos i \sin \varphi + \beta}{\mathrm{coo}\, \varphi}\right) + \bar{\Omega}, \tag{30}$$

где

$$\bar{\Omega} = \mu\psi + \Omega + \mu_1 \sin \psi + \mu_2 \sin 2\psi + \mu_3 \sin 3\psi + \mu_4 \sin 4\psi +$$

$$+ \bar{\mu}_1 \cos \zeta + \bar{\mu}_2 \sin 2\zeta. \tag{31}$$

Здесь Ω — постоянная интегрирования,

$$\beta = 2\varepsilon\sigma s \cos i \{1 - \varepsilon^2(4 - 5s^2 + e^2 s^2)\}, \tag{32}$$

$$\mu = -\frac{3}{2}\cos i \left\{\varepsilon^2(1 + \sigma^2) + \frac{\varepsilon^4}{8}(6 - 17s^2 - 24e^2 s^2)\right\}, \tag{33}$$

$$\mu_1 = -2\varepsilon^2 e \cos i \left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{8}[(4 - 28s^2) - e^2(6 + 7s^2)]\right\},$$

$$\mu_2 = -\frac{\varepsilon^2}{4} e^2 \cos i \left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4} [(22 + s^2) + e^2 (2 + s^2)]\right\},$$

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon^4}{4} e^3 \cos i (2 - s^2), \quad \bar{\mu}_1 = \varepsilon^3 \sigma s (1 - e^2) \cos i, \tag{34}$$

$$\mu_4 = \frac{\varepsilon^4}{64} e^4 \cos i (2 + s^2), \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\varepsilon^4}{32} s^2 (1 - e^2) \cos i,$$

а ζ дается формулой (27).

§ 5. Определение ψ по заданному t

Зависимость между переменными ψ и t принципиально ничем не отличается от подобной зависимости в случае $\sigma=0$ [2]. Пусть E определяется формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{35}$$

Тогда получим

$$E - e^* \sin E = M + \lambda\psi - \lambda_1 \sin\psi - \lambda_2 \sin 2\psi - \bar{\lambda}_1 \cos\zeta - \bar{\lambda}_2 \sin 2\zeta - \tag{36}$$

$$- \bar{\lambda}_3 \cos 3\zeta - \bar{\lambda}_4 \sin 4\zeta - \bar{\lambda}_{22} \sin 2\psi \cos 2\zeta,$$

где

$$M = n_0 (t - t_0) + M_0, \tag{37}$$

Здесь M_0 — постоянная интегрирования, t_0 — начальный момент времени,

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}} \left\{1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 (1 - e^2)(1 - s^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} \varepsilon^4 (1 - e^2)(1 - s^2)(1 + 11s^2 - e^2 + 5e^2s^2)\right\}, \tag{38}$$

$$e^* = e \{1 - \varepsilon^2 (1 - e^2)(1 - s^2) + \varepsilon^4 s^2 (1 - s^2)(1 - e^2)(3 + e^2)\}, \tag{39}$$

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^4}{16} (1 - e^2)^{3/2} (24 - 96s^2 + 75s^4),$$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon^3 \sigma s (4 - 5s^2)(1 - e^2)^{3/2}, \tag{40}$$

$$\bar{\lambda}_2 = -\frac{\varepsilon^2}{4} s^2 (1 - e^2)^{3/2} \left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4} [(12 - 13s^2) - e^2 (4 - 5s^2)]\right\},$$

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon^4}{4} s^2 e (4 - 5s^2)(1 - e^2)^{3/2},$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{32} \varepsilon^4 s^4 e^2 (1 - e^2)^{3/2}, \qquad \bar{\lambda}_4 = -\frac{\varepsilon^4 s^4}{64} (1 - e^2)^{5/2}, \tag{41}$$

$$\bar{\lambda}_3 = -\frac{1}{6} \varepsilon^3 \sigma s^3 (1 - e^2)^{3/2}, \qquad \bar{\lambda}_{22} = \frac{\varepsilon^4 s^4 e^2}{16} (1 - e^2)^{3/2}.$$

Уравнения (35)—(37) и (27) позволяют методом последовательных приближений вычислить ψ для любого момента времени t. После того как ψ будет найдено, можно будет определить ξ и φ, а затем и ξ, η, w. Прямоугольные координаты x, y, z могут быть вычислены по формулам (3).

Заметим, что выведенные формулы описывают все возможные ограниченные решения задачи, т. е. они описывают движение при любых начальных условиях, приводящих к ограниченным движениям. При выводе этих формул мы разлагали различные величины в ряды по степеням малых величин ε и σ, отбрасывая при этом члены шестого порядка и выше. Ряды эти заведомо сходятся для любых моментов времени и тех значений ε и σ, которые встречаются на практике.

§ 6. Определение элементов орбиты по начальным данным

Задача ставится следующим образом. Пусть для момента $t=t_0$, $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $\dot{x}=\dot{x}_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$, $\dot{z}=\dot{z}_0$. Требуется найти постоянные a, e, i, Ω, ω и M_0. Решение этой задачи аналогично решению задачи при $\sigma=0$, которое было получено нами в работе [3]. Приведем сразу окончательные результаты.

Пусть

$$\bar{r}_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c\sigma)^2,$$

$$V_0^2 = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2,$$

$$r_0' = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + (z_0 - c\sigma)\dot{z}_0.$$

Тогда для определения ξ_0, η_0, w_0 будут служить следующие формулы:

$$\xi_0^2 = \frac{\bar{r}_0^2 - c^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4c^2(z_0 - c\sigma)^2}{(\bar{r}_0^2 - c^2)^2}}\right\},$$

$$\xi_0 > 0, \quad \eta_0 = \frac{z_0 - c\sigma}{\xi_0}, \quad \operatorname{tg} w_0 = \frac{y_0}{x_0}.$$

Величины $\dot{\xi}_0$ и $\dot{\eta}_0$ находятся из равенств

$$(\xi_0^2 + c^2\eta_0^2)\dot{\eta}_0 = \xi_0\dot{z}_0 - \eta_0 r_0',$$

$$(\xi_0^2 + c^2\eta_0^2)\dot{\xi}_0 = \xi_0 r_0' + c^2\eta_0^2\dot{z}_0.$$

Далее находим c_1, h, c_2.

$$c_1 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0,$$

$$2h = V_0^2 - \frac{2fm(\xi_0 - c\sigma\eta_0)}{\xi_0^2 + c^2\eta_0^2},$$

$$2c_2 = -(1-\eta_0^2)^{-1}(c_1^2 + \xi_0^2\dot{\eta}_0^2 + c^2\eta_0^2\dot{\eta}_0^2) + 2hc^2\eta_0^2 - 2fmc\sigma\eta_0.$$

Затем вычисляем a_0, e_0, s_0:

$$a_0 = -\frac{fm}{2h}, \quad e_0^2 = 1 - \frac{4c_2h}{(fm)^2}, \quad s_0^2 = 1 + \frac{c_1^2}{2c_2}.$$

После чего определяем a, e, s:

$$a = a_0\{1 - \varepsilon_0^2(1-e_0^2)(1-s_0^2) - \varepsilon_0^4(1-e_0^2)(1-s_0^2)[(3-5s_0^2) + e_0^2(1-3s_0^2)]\},$$

$$1 - e^2 = (1-e_0^2)\{1 - \varepsilon_0^2(1+3e_0^2)(1-s_0^2) - \varepsilon_0^4(1-s_0^2)[(5-6s_0^2) +$$
$$+ e_0^2(14-24s_0^2) - e_0^4(3+2s_0^2)]\},$$

$$1 - s^2 = (1 - s_0^2)\{1 + \varepsilon_0^2 (1 - e_0^2) s_0^2 - \varepsilon_0^2 \sigma^2 (1 - 7 s_0^2) -$$
$$- \varepsilon_0^4 s_0^2 (1 - 2 s_0^2)(1 - e_0^2)^2\},$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{c}{a_0 (1 - e_0^2)}.$$

Для определения n_0 следует воспользоваться формулой

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a_0^3}}.$$

Пусть

$$q = \frac{a(1 - e\bar{e}) - \xi_0}{\xi_0 \bar{e} - a(\bar{e} - e)},$$

тогда ψ_0 получится из уравнений

$$\cos\psi_0 = q, \quad \sin\psi_0 = \frac{ae(1 - \bar{e}^2)(\xi_0^2 + c^2\eta_0^2)\dot{\xi}_0}{\sigma_2[\xi_0\bar{e} - a(\bar{e} - e)]^2 \sqrt{1 - k_2^2(1 - q^2)}}.$$

Если положить

$$\varkappa = \frac{\eta_0 - \gamma}{s - \eta_0 d},$$

то для вычисления φ_0 получим уравнения

$$\sin\varphi_0 = \varkappa, \quad \cos\varphi_0 = \frac{(s - \gamma d)(\xi_0^2 + c^2\eta_0^2)\dot{\eta}_0}{\sigma_1 (s - \eta_0 d)^2 \sqrt{1 - k_1^2 \varkappa^2}}.$$

Теперь находим ω.

$$\omega = \varphi_0 - \frac{k_1^2}{8}\left(1 + \frac{k_1^2}{2}\right)\sin 2\varphi_0 + \frac{3}{256} k_1^4 \sin 4\varphi_0 -$$
$$-(1 + \nu)\left[\psi_0 - \frac{k_2^2}{8}\left(1 + \frac{k_2^2}{2}\right)\sin 2\psi_0 + \frac{3}{256} k_2^4 \sin 4\psi_0\right].$$

Вычислив затем

$$\zeta_0 = (1 + \nu)\psi_0 + \omega,$$

вычислим Ω:

$$\Omega = w_0 - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos i \sin\varphi_0 + \beta}{\cos\varphi_0}\right) - \mu\psi_0 - \mu_1 \sin\psi_0 - \mu_2 \sin 2\psi_0 -$$
$$- \mu_3 \sin 3\psi_0 - \mu_4 \sin 4\psi_0 - \bar{\mu}_1 \cos\zeta_0 - \bar{\mu}_2 \sin 2\zeta_0.$$

Последний элемент M_0 легко определится из уравнений (35) — (37), если в них положить $t = t_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. «Астрон. журн.», 25, № 2, 363, 1963.
2. Аксенов Е. П. «Сообщения ГАИШ», № 137, 3, 1964.
3. Аксенов Е. П. «Тр. ГАИШ», 35, 36, 1966.

Поступила в редакцию
14. 12 1966 г.

Кафедра небесной
механики и гравиметрии