Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1968

УДК 53:001.89

С. Ф. ШУШУРИН

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О СЧЕТЧИКЕ С МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ

Проведен анализ возможных подходов к статистическому описанию случайного процесса. В качестве одного из возможных выделен метод описания с помощью плотности распределения интервалов между соседними событиями. В его рамках возможно просто решить обратную задачу для счетчика с «мертвым временем», значение которого произвольно, но постоянно (распределено несобственно).

§ 1. История вопроса

В начале развития экспериментальной ядерной физики применялись ионизационные счетчики Гейгера—Мюллера, которые обладают так называемым «мертвым временем», т. е. могут регистрировать частицу лишь через некоторое время после регистрации предыдущей. Это вносит ошибку в определяемое число частиц, прошедших через счетчик.

Поэтому почти одновременно с началом применения этих счетчиков возникла проблема учета ошибки, вносимой наличием мертвого времени счетчика в плотность распределения числа частиц, проходящих через счетчик в единицу времени. Эта проблема представляет по сути дела одну из задач теории массового обслуживания, но имеет свою специфику. Она развивалась более или менее независимо от теории массового обслуживания, и ей посвящено много работ (Гнеденко [1], Феллер [2], Манн [3] и др.). Обзор литературы по этому вопросу имеется в [4, 5].

В последние годы развитие конструкций счетчиков, в частности использование полупроводниковых детекторов излучения, значительно уменьшило актуальность этой проблемы, так как мертвое время в современных детекторах сведено к ничтожной величине.

Но, с другой стороны, в последнее время применение искровых камер позволило успешно решать проблему автоматического определения параметров частицы. Существенную роль в автоматической системе определения параметров играет счетно-решающее устройство. Оно не может начать расчет параметров вновь пролетевшей через искровую камеру частицы до тех пор пока не закончен расчет параметров предыдущей. В этом случае мертвое время обусловлено инерционностью искровой камеры и счетно-решающего устройства. Поэтому сейчас опять возник интерес к проблеме счетчика с мертвым временем [6]. Как правило, эта задача решается методами общей теории случайных процессов для случая континуального множества возможных значений параметров событий (например, моментов времени, в которые оно происходит). Не уменьшая общности задачи, можно поставить ее в дискретном случае. Это упростит решение, позволит не только оценить поправки к некоторым средним характеристикам процесса, но впервые поставить и решить обратную задачу о нахождении распределения параметров зарегистрированных событий, если известна плотность распределения мертвого времени счетчика (в частности, когда оно постоянно, т. е. когда его распределение несобственное).

Эта задача была решена в дискретном случае для постоянного мертвого времени, равного наименьшей длине интервала между соседними событиями [7]. В настоящей работе решение обобщается на случай произвольного, хотя и постоянного мертвого времени. Этот случай необходим для предполагающегося в дальнейшем решения обратной задачи для счетчика со случайным мертвым временем с известной плотностью распределения.

§ 2. Определение случайного процесса

Пусть имеется поток однородных событий, т. е. счетное множество событий, причем момент времени, в который происходит событие, является функцией порядкового номера события. В любом случае, который имеет место на опыте, это множество не только счетно, но и конечно. Частным случаем подобного потока однородных событий является множество пролетов частицы через счетчик, а также множество актов регистрации частиц этими счетчиками. Наличие мертвого времени приводит к тому, что второе множество является подмножеством первого.

Предполагается, что множество событий наблюдается или воспроизводится несколько раз. Можно говорить о серии событий. Серии событий, состоящие из некоторого числа событий, можно в свою очередь перенумеровать. Тогда момент времени, в который происходит событие, будет зависеть от двух параметров: номера события и номера серии. Назовем подобный поток однородных событий случайным процессом. Если в серии содержится одно событие, то поток однородных событий сводится к случайному событию, характеризующемуся одной случайной величиной.

Назовем поток однородных событий закономерным (или неслучайным), если в каждой серии событий момент каждого события оказывается (в пределах ошибки измерения) одним и тем же. В этом случае, зная номер события, мы можем предсказать момент его совершения в серии событий, которая еще не осуществилась. Причем не имеет значения задание связи (таблицы, расчеты, графики) между номером и моментом времени события. Поток будет неслучайным и в том случае, когда момент k-того события меняется от серии к серии, причем известна связь между номером события и номером серии, с одной стороны, и моментом времени события, с другой.

В качестве величины, характеризующей однородный поток событий, берется не момент времени каждого события, а интервал времени между моментами соседних событий [8]. Пусть

$$z_k = t_k - t_{k-1}, \quad k \geqslant 1, \quad t_0 = 0,$$

где t_k — момент наступления k-того события. В пределах одной серии некоторые z могут совпадать. Следовательно, можно построить плотность распределения величины интервала z в пределах одной серии. Для каждого z_k также можно построить плотность распределения множества их значений в различных сериях. Случайный процесс задан, если задана плотность распределения для каждого z_k, т. е. множество плотностей $\varphi_k(z)$, зависящих от номера k. Иногда это множество $\varphi_k(z)$ называется случайным вектором, но для этого необходимо определить смысл сложения векторов, других операций над ними и свойств векторов, правило преобразования компонентов. Пока это не сделано, нет смысла говорить о случайном векторе.

Наиболее полным заданием случайного процесса является задание плотностей распределения моментов времени для каждого события или множество функций $\varphi_k(z)$. Может оказаться, что для каждой серии существует плотность $\psi_l(z)$, где l — номер серии.

Ограничим рассмотрение равновесными случайными процессами. Назовем равновесным случайным процессом такой случайный процесс, для которого $\psi(z)$ одинакова при всех l. Заметим, что равновесие случайного процесса не означает его рекуррентности; $\varphi(z)$ может зависеть от k, общая плотность для всех n событий может не меняться от серии к серии.

Итак, возможны различные способы описания случайного процесса.

Наиболее общим является способ описания с помощью задания $\{\varphi_k(t)\}$ или $\{\varphi_k(z)\}$.

Более частным является способ описания с помощью задания $\psi(z)$, которая не зависит от номера серии. Зная $\psi(z)$, можно определить $\{\varphi_k(t)\}$ или $\{\varphi_k(z)\}$. В этом можно убедиться на следующем примере. Предположим, у нас имеется набор палочек с целочисленными значениями длин. Набор будет определяться относительными количествами палочек определенной длины в наборе. Выкладывая палочки в ряд слева направо, мы получим множества положений стыков палочек, зависящие от серии выкладывания. Поэтому этот случай можно рассматривать как модель случайного процесса с определенной $\psi(z)$. Зная $\psi(z)$, можно вычислить $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\varphi_k(z)\}$.

Возможен еще один частный, но часто используемый метод описания.

Интервал времени $T=t_N-t_0$, где N — число событий в серии, разбивают на равные интервалы Δt так, что $T\gg\Delta t>\Delta t_{\min}$, где $\Delta t_{\min}$ — наименьший интервал между соседними событиями. Затем подсчитывается число событий, приходящихся на каждый интервал Δt, и строится плотность распределения интервалов Δt по числу пришедшихся на них событий.

Этот метод очень широко используется при регистрации излучений, но его применение вызвано не принципиальными, а техническими соображениями, так как счетная аппаратура ядерной физики может легко регистрировать число событий в течение определенного интервала времени. В настоящее время можно сконструировать аппаратуру, которая автоматически определяла бы распределения интервалов между соседними зарегистрированными событиями. Если опыт покажет, что для потока регистрируемых частиц плотность $\psi(z)$ не зависит от номера серии событий, то описание с помощью этой плотности позволяет просто решить обратную задачу о счетчике с мертвым временем. Кроме того, третий способ обладает большим недостатком. Плотности распределения $f(n)$, где n — число событий, произошедших во время интервала Δt, существенно зависит от его величины. Выбирая Δt достаточно малым, например $\Delta t<\Delta t_{\min}$, распределение можно свести к функции на множестве из двух значений переменного: $n=1$ и $n=0$. Уменьшая дальше Δt, можно добиться того, что доля интервалов, на которых произойдет событие, будет сколь угодно малой, т. е. практически свести любое распределение $f(n)$ к несобственному.

В двух предыдущих случаях плотности распределения, если они существуют, не зависят от параметра, который можно произвольным образом выбрать.

Идея настоящей работы сводится к полному решению задачи о счетчике с мертвым временем в том случае, когда для каждой серии событий плотность $\psi(z)$ одна и та же. Справедливо это или нет для случайных процессов, изучаемых ядерной физикой, может показать лишь опыт. Конечно, желательно решить поставленную задачу и в том случае, когда случайный процесс задан множеством функций $\{\varphi_k(t)\}$ или $\{\varphi_k(z)\}$.

§ 3. Решение для счетчика с единичным мертвым временем [7]

Рассмотрим следующий процесс: интервалы между событиями могут быть только целочисленными; мертвое время счетчика равно единице времени. Для каждой серии событий плотность $\psi(z)$ одна и та же.

Для решения задачи о восстановлении плотности $\psi(z)$ процесса по известной $\psi_1(z)$ для зарегистрированных событий воспользуемся моделью палочек, о которой говорилось выше. Итак, пусть имеется практически неограниченный набор палочек с плоскими торцами. Задана плотность распределения их длин $\psi(z)$. Мертвое время моделируется тем, что у всех палочек единичной длины правый торец смазан клеем. При выкладывании набора палочки единичной длины склеиваются с соседями справа, образуя палочки, длина которых больше на единицу.

При достаточно большом числе выложенных палочек число возможных пар палочек, в которых единичная палочка будет находиться слева, равны следующим выражениям (k_i — число палочек длины в набор):

Пары	Количество
$1-1$	$2C_{k_1}^2 = k_1(k_1-1)$
$1-2$	k_1k_2
$1-3$	k_1k_3
. . .	. . .
$1-n$	k_1k_n

Полное количество пар, у которых слева находится единичная палочка, равно

$$S = k_1(k_1 - 1) + k_1 \sum_{i=2}^{n} k_i.$$

После склеивания палочек единичной длины с соседними в новом наборе палочек, образовавшемся после склеивания, не будет ни одной единичной палочки. Обозначим k_i' — число палочек длины i в новом наборе. Тогда $k_1'=0$. Пусть n — максимальная длина палочек. Число палочек длины 2 уменьшится за счет того, что некоторые палочки основного набора склеиваются и образуют палочки длины 3. Будем считать, что доля «ушедших» палочек равна доле пар 1—2, т. е. $k_1k_2S^{-1}$. Но, с другой стороны, за счет склеивания между собой палочек единичной длины, количество палочек двойной длины увеличится. Доля «пришедших» палочек составит $k_1(k_1-1)S^{-1}$.

Итак

$$k_2' = k_2 + k_1\frac{k_1(k_1-1)}{S} - k_2\frac{k_1k_2}{S} = k_2 +$$

$$+\frac{k_1^3-k_1^2}{S} - \frac{k_2^2k_1}{S} = k_2 + \frac{1}{S}\left[k_1^3 - k_1(k_1+k_2^2)\right];$$

$$k_3' = k_3 + k_2\frac{k_1k_2}{S} - k_3\frac{k_1k_3}{S} = k_3 + \frac{1}{S}(k_1k_2^2 - k_1k_3^2) =$$

$$= k_3 + \frac{k_1}{S}(k_2+k_3)(k_2-k_3)$$

. . . .

$$k_n' = k_n + \frac{k_1}{S}(k_{n-1}+k_n)(k_{n-1}+k_n)$$

$$k_{n+1}' = k_n\frac{k_1k_n}{S} = \frac{k_1k_n^2}{S}, \quad k_{n+2}' = 0 \text{ и т. д.}$$

(В работе [7] при выводе этих соотношений допущена алгебраическая ошибка.) Образованием палочек длины больше единичной пренебрегаем.

Полученные соотношения можно рассматривать как систему n кубических уравнений относительно k_i. Так как k_i' соответствуют количеству интервалов в зарегистрированном случайном процессе, то они суть величины известные. Решая систему, мы определим количество интервалов длины i в реальном, неискаженном процессе. Конечно, эти числа нужно понимать как средние значения количеств интервалов длины i.

Для счетчиков с определенным значением мертвого времени этого было бы достаточно для решения обратной задачи, так как эмпирическую плотность распределения $\psi(z)$ можно всегда записать, используя в качестве единицы времени мертвое время.

§ 4. Решение задачи для произвольного, но определенного мертвого времени

Решение задачи в данном случае необходимо для решения обратной задачи для счетчика со случайным мертвым временем.

Пусть мертвое время $\theta=2$. Обозначим $k_i^{(2)}$ — число палочек длины i при условии, что правые стороны палочек, для которых $i\leqslant 2$, намазаны клеем. Тогда $k_1^{(2)} = k_2^{(2)}$. Из множества палочек тройной длины убудет некоторое количество за счет склеивания с палочками двойной и единичной длины. Образованием палочек длины более 3 из более чем 2 палочек мы опять пренебрегаем. Число убывших пар будет пропорционально сумме пар 1—3 и 2—3, т. е. величине $k_1k_3 + k_2k_3 = k_2(k_1 + k_2)$. Но к этому множеству прибудет некоторое количество пар, пропорциональное сумме количеств пар 1—2 и 2—1, т. е. пропорционально $2k_1k_2$. Тогда

$$k_3^{(2)} = k_3 - \frac{k_3}{S^{(2)}} k_2 (k_1 + k_3) + \frac{k_1 + k_2}{S^{(2)}} k_1 k_2 =$$

$$= k_3 - \frac{1}{S^{(2)}} (k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3^2 + k_1^2 k_2 + k_1 k_2^2),$$

где $S^{(2)}$ — число пар, у которых левая палочка смазана (имеет длину 1 или 2) плюс число пар $1-2$ и $2-1$; $1-1$ и $2-2$, т. е.

$$S^{(2)} = 2k_1k_2 + k_1 (k_2 - 1) + k_2 (k_2 - 1) + \sum_{i=3}^{n} k_1 k_i + \sum_{i=3}^{n} k_2 k_i.$$

Аналогично можно написать

$$k_4^{(2)} = k_4 - \frac{k_4}{S^{(2)}} (k_1 k_4 + k_2 k_4) + \frac{k_1}{S^{(2)}} k_1 k_3 + \frac{k_2}{S^{(2)}} k_2 (k_2 - 1),$$

$$k_5^{(2)} = k_5 - \frac{k_5}{S^{(2)}} (k_1 k_5 + k_2 k_4) + \frac{k_1}{S^{(2)}} k_1 k_4 + \frac{k_2}{S^{(2)}} k_2 k_3$$

. . . .

$$k_n^{(2)} = k_n - \frac{k_n}{S^{(2)}} (k_1 k_n + k_2 k_{n-1}) + \frac{k_1}{S^{(2)}} k_1 k_{n-1} + \frac{k_2}{S^{(2)}} k_2 k_{n-2},$$

$$k_{n+1}^{(2)} = \frac{k_1}{S^{(2)}} k_1 k_n + \frac{k_2}{S^{(2)}} k_2 k_{n-1},$$

$$k_{n+2}^{(2)} = \frac{k_2}{S^{(2)}} k_2 k_n, \quad k_{n+3}^{(2)} = 0.$$

Теперь несложно обобщить результат на случай $\theta = l$.

$$k_m^{(l)} = k_m - \frac{k_n}{S^{(l)}} (k_1 k_m + k_2 k_{m-1} + \ldots + k_l k_{m-l-1}) +$$

$$+ \frac{1}{S^{(l)}} (k_1^2 k_{m-1} + k_2^2 k_{m-2} + \ldots + k_l^2 k_{m-l}),$$

где $m = 1, 2, \ldots, n$

$$k_{n+1}^{(l)} = \frac{1}{S^{(l)}} (k_1^2 k_n + k_2^2 k_{n-1} + \ldots + k_l^2 k_{n-l+1}),$$

$$k_{n+2}^{(l)} = \frac{1}{S^{(l)}} (k_2^2 k_n + k_3^2 k_{n-1} + \ldots + k_l^2 k_{n-l+2},$$

. . . .

$$k_{n+l}^{(l)} = \frac{1}{S^{(l)}} k_l^2 k_n, \quad k_{n+l+1}^{(l)} = 0, \text{ и т. д.}$$

где $S^{(l)}$ — число пар, у которых левая палочка имеет длину не более l плюс число различных пар, которые можно образовать из палочек длины не более l. Выражение для $S^{(l)}$ вычисляется аналогично предыдущему. Полученные выражения можно использовать при решении обратной задачи для счетчика со случайным мертвым временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. ЖЭТФ, **11**, 101—106, 1941.
2. Feller W. Studies and Essays presented to R. Courant on his birthday, January 8. 1948. N. Y., 1948, pp. 105—116.
3. Kurbatov J. D., Mann H. B. Phys. Rev., **68**, 40—43, 1945; Mann H. B. Quart. Appl. Math., 4, 307—309, 1946.
4. Bharucha-Reid A. T. Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. New York — Toronto — London, § 6. 3, 1960, p. 299—313.
5. Гольданский В. И., Куценко А. В., Подгорецкий М. И. Статистика отсчетов при регистрации ядерных излучений. М., Физматгиз, 1959.
6. Guessous A. C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 5640—5642, 1964; **258**, 5851—5854, 1964.
7. Chouchourine S. C. R. Acad. Sci. Paris, **261**, 2625—2628, 1965.
8. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966, стр. 9.

Поступила в редакцию
28. 10 1966 г.

Кафедра общей физики
для физического факультета МГУ
Институт им. Анри Пуанкаре
Парижский университет