Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1968

УДК 530.12+531.51

К. П. СТАНЮКОВИЧ

ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ «ВСЕЛЕННЫХ»

Рассмотрены однородные модели вселенной, обобщающие известные решения де Ситтера.

Исследование однородных и изотропных моделей нестационарных «Вселенных» является существенной задачей космологии ОТО. Эти модели нестационарных «Вселенных» удобнее всего изучать, рассматривая пятимерный геометрический формализм, как это делал де Ситтер [1, 2], считая, что четырехмерное кривое пространство—время вписано в пятимерное эвклидово пространство.

Напишем 5-интервал в виде

$$-ds^2 = dx^{i2} = dx^{12} + dx^{22} + dx^{32} + dx^{42} + dx^{52},$$

где

$$x^1 = r_5 \sin\chi \cos\varphi \sin\theta \sin\omega,$$

$$x^2 = r_5 \sin\chi \sin\varphi \sin\theta \sin\omega,$$

$$x^3 = r_5 \sin\chi \cos\theta \sin\omega,$$

$$x^4 = r_5 \cos\chi \sin\omega,$$

$$x^5 = r_5 \cos\omega,$$

причем $x^{i2} = x^{12} + x^{22} + x^{32} + x^{42} + x^{52} = r_5^2$. Здесь $r_5 = a^*$, где a^* может быть переменно и является «радиусом» кривизны пятимерного пространства—времени; 4-радиус $r_4 = r_5 \sin\omega = a^* \sin\omega = a$; 3-радиус

$$r_3 = r = r_4 \sin\chi = r_5 \sin\chi \sin\omega = (x^{12} + x^{22} + x^{32})^{1/2}.$$

При этом

$$x^1 = r_3 \cos\varphi \cos\theta, \quad x^2 = r_3 \cos\varphi \sin\theta, \quad x^3 = r_3 \cos\theta, \quad x^4 = r_4 \cos\chi = a\cos\chi.$$

Далее очевидно, что

$$dx^{12} + dx^{22} + dx^{32} = dr_3^2 + r_3^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

... им. Горького М Г У

Поскольку

$$dr = dr_3 = a^* (\cos\chi \sin\omega \, d\chi + \sin\chi \cos\omega \, d\omega) + da^* \sin\chi \sin\omega,$$

$$dx^4 = a^* (\cos\chi \cos\omega \, d\omega - \sin\chi \sin\omega \, d\chi) + da^* \cos\chi \sin\omega, \tag{1}$$

$$dx^5 = -a^* \sin\omega \, d\omega + da^* \cos\omega, \text{ то:}$$

$$-ds^2 = a^{*2} \sin^2\omega \, [\sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + d\chi^2] + a^{*2} d\omega^2 + da^{*2},$$

или

$$-ds^2 = r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 + \left(\frac{d\chi}{\sin\chi} \right)^2 \right] + a^{*2} d\omega^2 + da^{*2}. \tag{2}$$

Введем радиус кривизны трехмерного пространства

$$r_4 = a = \sqrt{x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} + x^{4^2}} = a^* \sin\omega.$$

При этом (1) имеет вид

$$-ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi \, (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)] + \frac{a^2 d\omega^2}{\sin^4\omega} + \frac{da^2}{\sin^2\omega} - \frac{2a \, da \, d\omega \cos\omega}{\sin^3\omega}.$$

Поскольку $r_3 = r_4 \sin\chi = a \sin\chi$, то

$$\frac{r \, d\chi}{\sin\chi} = \frac{dr - \frac{r}{a} da}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} \tag{3}$$

и (2) принимает вид

$$-ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + \frac{r^2}{a^2} \frac{da^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} -$$

$$- \frac{2 \frac{r}{a} dr \, da}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{a^2 d\omega^2}{\sin^4\omega} + \frac{da^2}{\sin^2\omega} - \frac{2a \, da \, d\omega \operatorname{ctg}\omega}{\sin^2\omega}.$$

При $a = \text{const}$ получим

$$-ds^2 = \frac{a^2 d\omega^2}{\sin^4\omega} + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2). \tag{4}$$

Если

$$x^5 = ict = \frac{x^4 \operatorname{ctg}\omega}{\cos\chi} = r_4 \operatorname{ctg}\omega = a \operatorname{ctg}\omega,$$

то $ic \, dt = -\frac{a d\omega}{\sin^2\omega}$ и (4) принимает вид

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2),$$

т. е. приходим к обычной метрике Эйнштейна для однородного изотропного сферического пространства.

Если $a = a(t)$, то (3) примет вид

$$-ds^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] - c^2 dt^2,$$

или

$$-ds^2 = a^2[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{5}$$

где

$$ict = a\operatorname{ctg}\omega,\quad a^2 d\eta^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - da^2 = -(da^{*2} + a^{*2} d\omega^2).$$

Таким образом,

$$c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2\left[1 + \left(\frac{da}{cd\tau}\right)^2\right] = c^2 d\tau^2 + da^2,$$

где $a = a(\tau)$. Далее сделаем такие преобразования. Поскольку $a^{*2} d\omega^2 + da^2 = da^2 - c^2 dt^2$;

$$r^2\left(\frac{d\chi}{\sin\chi}\right)^2 = \frac{dr^2 + \frac{r^2}{a^2} da^2 - 2\frac{r}{a} dr\, da}{1 - \frac{r^2}{a^2}},$$

то (2) принимает вид

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + da^2 + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2] + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{\frac{r^2}{a^2} da^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \frac{2\frac{r}{a} dr\, da}{1 - \frac{r^2}{a^2}},$$

или

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{da^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \frac{2\frac{r}{a} dr\, da}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2], \tag{6}$$

или

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{\frac{r^2}{a^2}\cdot da^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \frac{2\frac{r}{a} dr\, da}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2]. \tag{7}$$

Обычный фридмановский интервал имеет вид

$$-ds^2 = a^2[-d\eta^2 + d\chi^2 + A^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{8}$$

де $ad\eta = cd\tau$; τ — собственное время, $A = \sin\chi$; χ; $\operatorname{sh}\chi$ — для сферического $(a^2 > 0)$ квазиевклидового $(a^2 \to \infty)$ и гиперболических пространств $(a^2 < 0)$.

В случае квазиевклидового пространства $a = b = b(\tau)$ есть просто масштабный фактор. Поскольку $r = aA$, то

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 + \frac{r^2 d\chi^2}{A^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Далее, поскольку $\frac{dA}{A}=\frac{dr}{r}-\frac{da}{a}$,

то

$$\frac{r d\chi}{\chi}=\frac{\left(dr-\frac{r}{a}\,da\right)}{dA}\,d\chi=\frac{dr-\frac{r}{a}\,da}{\sqrt{1-\beta_1\frac{r^2}{a^2}}},$$

где $\beta_1=1$; 0; -1; соответственно для $A=\sin\chi$; χ; $\operatorname{sh}\chi$; Отсюда

$$-ds^2=-c^2\,d\tau^2+\frac{r^2}{a^2}\,\frac{da^2}{1-\beta_1\frac{r^2}{a^2}}+\frac{dr^2}{1-\beta_1\frac{r^2}{a^2}}+$$

$$+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)-\frac{2\frac{r}{a}\,dr\,da}{1-\beta_1\frac{r^2}{a}},$$

т. е. приходим к интервалу (7).

Сделаем иные преобразования. С помощью прямоугольного сферического треугольника вместо двух координат χ и ω введем новые две координаты $\frac{icT}{a^*}$ и ξ. Очевидно, что

$$\cos\omega=\cos\xi\cos\frac{icT}{a^*};\quad \operatorname{ctg}\chi=\operatorname{ctg}\xi\sin\frac{icT}{a^*}.$$

Обратные преобразования имеют вид

$$\sin\xi=\sin\chi\sin\omega,\quad \operatorname{tg}\frac{icT}{a^*}=\cos\chi\operatorname{tg}\omega.$$

После подстановки (8) в уравнение (6), поскольку

$$\sin^2\omega\,d\chi^2+d\omega^2=d\xi^2-\cos^2\xi\,d\left(\frac{cT}{a^*}\right)^2,$$

получим

$$-ds^2=a^{*2}\sin^2\xi\left[d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right]+$$

$$+a^{*2}\left[d\xi^2-\cos^2\xi\,d\left(\frac{cT}{a^*}\right)^2\right]+da^{*2}. \tag{9}$$

Введем $r=a^*\sin\xi=a^*\sin\omega\sin\chi$, тогда (9) примет вид

$$-ds^2=r^2\left[d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right]+\frac{a^{*2}}{1-\frac{r^2}{a^{*2}}}\,d\left(\frac{r}{a^*}\right)^2-a^{*2}\left(1-\frac{r^2}{a^{*2}}\right)d\left(\frac{cT}{a^*}\right)^2+da^{*2},$$

или

$$-ds^2=-\left(1-\frac{r^2}{a^{*2}}\right)c^2\,dT^2+\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{a^{*2}}}+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)+$$

$$+da^{*2}\left[1-\left(1-\frac{r^2}{a^{*2}}\right)\frac{c^2T^2}{a^{*2}}+\frac{r^2}{a^{*2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)}\right]+$$

$$+2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)cdT\frac{da^*}{a^*}cT-\frac{2\,dr\,da^*\,\frac{r}{a^*}}{1-\frac{r^2}{a^{*2}}}. \qquad (10)$$

Поскольку

$$\cos\omega=\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}\cos\frac{icT}{a^*}=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^{*2}}}.$$

Найдем

$$1-\frac{r^2}{a^{*2}}=\frac{1-\frac{r^2}{a^2}}{1-\frac{r^2}{a^2}\,\mathrm{ch}^2\,\frac{cT}{a^*}}.$$

При $a^*=\mathrm{const}$ получим интервал де Ситтера

$$-ds^2=-\left(1-\frac{r^2}{a^{*2}}\right)c^2d\tau^2+\frac{dr^2}{1-\frac{r^2}{a^{*2}}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

Пусть $\mathrm{ch}\,\frac{cT}{a^*}=\cos\frac{icT}{a^*}=0$, тогда $\frac{icT}{a^*}=\frac{\pi}{2}+n\pi=\frac{\pi}{2}(1+2n)$; $-\frac{c^2T^2}{a^{*2}}=\mathrm{const}$; $a=a^*$ (кривизна отрицательная).

При этом (10) принимает вид $(a\to ia)$:

$$-ds^2=-2\left[\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{2}{\pi^2\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)}\right]c^2dT^2+\frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}}+$$
$$+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)-\frac{r}{cT}\,\frac{2cdT\,dr}{1+\frac{r^2}{a^2}},$$

где $cT=\alpha a=\mathrm{const}\,a$.

Таким образом,

$$-ds^2=-2\alpha^2da^2\left[\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{2}{\pi^2\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)}\right]+$$
$$+\frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)-\frac{2\frac{r}{a}\,da\,dr}{1+\frac{r^2}{a^2}}. \qquad (11)$$

Сравнивая (11) с соотношением (6), которое для гиперболического случая напишем в виде

$$-ds^2=-c^2dt^2\left[1-\left(\frac{da}{cdt}\right)\frac{1}{1+\frac{r^2}{a^2}}\right]+$$
$$+\frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)-\frac{2\frac{r}{a}\,dr\,da}{1+\frac{r^2}{a^2}},$$

найдем

$$c^2 dt^2\left[1-\left(\frac{da}{cdt}\right)^2\frac{1}{1+\frac{r^2}{a^2}}\right]=$$

$$=c^2 d\tau^2\left[1-\frac{\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{da}{cd\tau}\right)^2}{1+\frac{r^2}{a^2}}\right]=2\alpha^2 da^2\left[\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{2}{\pi^2\left(1+\frac{r^2}{a^2}\right)}\right].$$

При $r=0$:

$$c^2 dt^2\left[1-\left(\frac{da}{cdt}\right)^2\right]=2\alpha^2 da^2\left(1-\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}\right)=2\beta^2 da^2,$$

откуда при $r=0$

$$1-\left(\frac{da}{cdt}\right)^2=2\beta^2\left(\frac{da}{cdt}\right)^2;\quad \frac{da}{cdt}=\frac{1}{\sqrt{1+2\beta^2}},$$

или

$$\frac{da}{cd\tau}=\frac{\sqrt{2}}{2\beta},$$

что не может иметь место, поскольку для гиперболического случая $a=$ $=a_0(\operatorname{ch}\eta-1)$, $c\tau=a_0(\operatorname{sh}\eta-\eta)$ и

$$\left(\frac{da}{cd\tau}\right)\neq\text{const},$$

тем более при $r>0$ уравнения (11) и (6) несовместимы. Поскольку (6) удовлетворяет уравнениям Эйнштейна, то (11) им уже не удовлетворяет, а могут быть решением иных уравнений гравитации, чем эйнштейновы.

Рассмотрим отдельно вариант, когда 4-кривизна $a^*=\text{const}$, но время $ict=x_5=a^*\cos\omega=a\operatorname{ctg}\omega$.

При этом

$$-ds^2=a^{*2}d\omega^2+a^{*2}[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Поскольку $d\omega=-\frac{icdt}{a}$, то

$$-ds^2=-\frac{a^{*2}c^2\,dt^2}{a^{*2}+c^2t^2}+a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)].\tag{12}$$

Пусть

$$cdt\,\frac{a^*}{a}=cdt\,\frac{a^*}{\sqrt{a^{*2}+c^2t^2}}=cd\tau=ad\eta,$$

тогда (12) принимает обычный фридмановский вид

$$-ds^2=a^2[-d\eta^2+d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)].$$

При этом

$$\eta=\int\frac{cdt}{a^*\left(1+\frac{c^2t^2}{a^{*2}}\right)}=\operatorname{arth}\frac{ct}{a^*},\tag{13}$$

$$\frac{c\tau}{a^*}=\int\frac{cdt}{a^*\sqrt{1+\frac{c^2t^2}{a^{*2}}}}=\operatorname{arth}\frac{ct}{a^*}.\tag{14}$$

Здесь собственное время τ и время, отсчитываемое наблюдателем (из центра) t связано таким же соотношением, как и в специальной теории относительности при постоянном ускорении в собственной системе отсчета.

Из (11), (13) и (14) имеем

$$\frac{ct}{a^*} = \operatorname{tg}\eta = -i\cos\omega = \operatorname{sh}\frac{c\tau}{a^*}.$$

Можно также, полагая непосредственно $a^* d\omega = -ia\,d\eta$, прийти к соотношению $i\,d\eta = \frac{a^*}{a}\,d\omega = \frac{d\omega}{\sin\omega}$, откуда $\cos i\eta = \frac{1}{\sin\omega}$, что равносильно предыдущему выражению. Поскольку $c^2t^2 = a^2 - a^{*2}$, то

$$\frac{c\tau}{a^*} = \operatorname{arsh}\frac{ct}{a^*} = \operatorname{arsh}\sqrt{\frac{a^2}{a^{*2}} - 1}\,; \quad \eta = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2}{a^{*2}} - 1}\,. \qquad (15)$$

Так как зависимость (15) не фридмановская

$$a = a_0(1 - \cos\eta); \quad c\tau = a_0(\eta - \sin\eta),$$

то эти решения противоречат уравнениям Эйнштейна. Им должны соответствовать другие уравнения, резко отличающиеся от эйнштейновских, например $\varkappa$ должно быть сложной функцией времени, и в правой части уравнения должны стоять дополнительные переменные члены, отличающиеся от постоянного λ члена.

Это вряд ли делает приемлемым указанные варианты пространства—времени в «ортодоксальной» общей теории относительности; считается очевидным, что надо менять или, точнее говоря, обобщать уравнения Эйнштейна.

В случае абсолютно однородного (изотропного) n-мерного пространства постоянной кривизны $R^* = \frac{-n(n-1)}{r_{n+1}^2}$, где r_{n+1} — радиус гиперсферы в евклидовом пространстве $(n+1)$ измерения (r_n — радиус «кривого» пространства n измерений).

При $n = 4$ $R^* = -\frac{12}{a^{*2}}$.

Поскольку

$$-a^{*2} = c^2t^2 - a^2, \text{ то } R^* = \frac{12}{c^2t^2 - a^2}.$$

Для интервала (5) имеем

$$R = \frac{6}{a^2}\left(1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right). \qquad (16)$$

Выберем $R = \frac{12}{a^2}$ (7) так, чтобы пространство де Ситтера и Фридмана при определенной зависимости $a = a(\tau)$ давали бы одинаковое по форме выражение для R. При этом получим

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2} = 1.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $a^2 = c^2\tau^2 + a_0^{*2}$; таким образом,

$$R = \frac{12}{c^2\tau^2 + a_0^{*2}}. \qquad (17)$$

При $\tau = 0$; $\alpha = \overset{*}{\alpha_0} = i\bar{a}^*$ (при $\bar{\tau} = \frac{\bar{a}^*}{c}$; $a = 0$), что дает начало разлета (τ определяется с точностью до константы), при a_0^* обе модели совпадают.

На фронте разлетающейся «Вселенной» $d\chi=0$, $d\tau=0$, $ds=0$, $cdt=da$, $a=ct$, что характеризует асимптотически естественную прямолинейность первой характеристики.

Если рассматривать не только сферическую «Вселенную», но и другие ее виды — квазиевклидову и гиперболическую, то уравнение (16) можно написать в виде

$$R = \frac{6}{a^2}\left(\beta_1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a\ddot{a}}{c^2}\right), \tag{18}$$

где

$$\beta = 1;\ 0;\ -1$$

соответственно для трех видов «Вселенной», с интервалом

$$-ds^2 = a^2[-d\eta^2 + d\chi^2 + A^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{19}$$

причем $A = \sin\chi : \chi : \operatorname{sh}\chi$ для $\beta = 1;\ 0;\ -1$.

Полученные соотношения дают такой же результат, как и соотношения моделей Фридмана при $\varkappa \sim a$, что нами было получено ранее [3]. Таким образом, переменность $\varkappa \sim a \sim ct$, где $ct = c\tau$ — собственное время, делает все четыре координаты x^i совершенно равноправными (и не выделяет особо время), что имеет место в обычных моделях Фридмана при $\varkappa = \text{const}$, т. е. приводит к однородной изотропной модели «Вселенной» по всем четырем измерениям. При этом «выполняется» группа Пуанкаре и де Ситтера; если $\varkappa = \text{const}$, то модели Фридмана удовлетворяют лишь группе Галилея, что в результате дает закон тяготения Ньютона.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Sitter. Monthly Not., **76**, 699; **77**, 155; **78**, 3, 1917.
2. Эддингтон А. С. Теория относительности, § 70. М., ГИТТЛ, 1934, стр. 299.
3. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы, ч. II, § 4. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
14.6 1966 г.

Кафедра
теоретической физики