Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1968

УДК 53:519.25

НГУЕН ТАНГ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КООРДИНАТ ПО МЕТОДУ ГИББСА ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Методом Гиббса получены точные общие выражения для вычисления плотности вероятности обобщенных координат квантовых систем и вероятность перехода квантовой броуновской частицы. В работе обсуждено уравнение Фоккера—Планка для квантовой системы.

В работах [1—5] было показано, что методом Гиббса может быть выведено общее выражение для плотности вероятности перехода, а также уравнения для этой плотности вероятности в случае классических систем. Недавно этим методом были получены точные формулы для флуктуаций и корреляций квантовых систем [6, 7], которые являются квантовым обобщением формул, полученных в [8, 9], и более общим, чем обобщение, предложенное Р. Л. Стратоновичем [10].

В настоящей работе будет показано, что этим методом могут быть получены общие выражения для вычисления плотности вероятности обобщенных координат и уравнения для этой плотности в случае квантовых систем с внешней постоянной силой.

Плотность вероятности перехода

Согласно [11] плотность вероятности перехода системы из состояния $F(x)=F_0$ (т. е. $F_1(x)=F_{10}, \ldots, F_s(x)=F_{s0}$) в начальный момент t_0 в состояние $F(x)=F$ $(F_1(x)=F_1, \ldots, F_s(x)=F_s)$ в момент t равна

$$W(F, t;\, F_0, t_0) = \int\limits_{(x^0)} \delta\{F-F(x^t)\}\, \frac{\exp[\psi-H(x^0)/\theta]}{\rho_0(F_0)}\, \delta\{F_0-F(x^0)\}\, dx^0,$$

где $\rho_0(F_0)$ — плотность вероятности равновесных значений по ансамблю Гиббса, x^0 и x^t — значения канонических переменных в начальный момент t_0 и в момент t.

Если в начальный момент $t=t_0$ плотность вероятности величин F равна $W_0(F_0)$, то плотность вероятности в произвольный момент t равна

$$W(F, t) = \int\limits_{(x^0)} \delta\{F-F(x^t)\} \exp\left[\frac{\psi-H(x^0)}{\theta}\right] \frac{W_0\{F(x^0)\}}{\rho_0\{F(x^0)\}}\, dx^0$$

или

$$W(F, t) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi F} \varphi(\xi, t)\, d\xi, \tag{1}$$

где $\varphi(\xi, t)$ — характеристическая функция системы

$$\varphi(\xi, t) = \int\limits_{(x^0)} \frac{W_0\{F(x^0)\}}{\rho_0\{F(x^0)\}} e^{-i\xi F(x^t)} e^{\frac{\psi - H(x^0)}{\theta}} dx^0.$$

В квантовом случае характеристическая функция системы очевидно может быть записана в виде

$$\varphi(\xi, t) = \mathrm{sp}\left\{\frac{\widehat{W}_0(\widehat{F}_0)}{\widehat{\rho}_0(\widehat{F}_0)} e^{-i\xi\widehat{F}_t} e^{\frac{\psi - \widehat{H}_0}{\theta}}\right\}, \tag{2}$$

где $\widehat{W}_0$ — оператор матрицы плотности для начальных значений оператора $\widehat{F}_0$, $\widehat{\rho}_0$ — оператор матрицы плотности по равновесному ансамблю Гиббса.

Из (2) видно, что если операторы $\widehat{F}_1, \ldots, \widehat{F}_s$ коммутируют друг с другом, то моменты распределения (1) выражаются через φ так:

$$\overline{\widehat{F}_1^{n_1} \ldots \widehat{F}_s^{n_s}} = i^{n_1 + \ldots + n_s} \frac{\partial^{n_1 + \ldots + n_s} \psi}{\partial \xi_1^{n_1} \ldots \partial \xi_s^{n_s}} \Bigg|_{\xi = 0}. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию

$$Z(a, \theta, t) = \mathrm{sp}\left\{\frac{\widehat{W}_0}{\widehat{\rho}_0} \exp\left[-\frac{\widehat{H}_0 + a\widehat{F}_\lambda}{\theta}\right]\right\}.$$

Обозначив $\frac{1}{Z} = \exp\left[\frac{\psi(a, \theta, t)}{\theta}\right]$, получим

$$\mathrm{sp}\left\{\frac{\widehat{W}_0}{\widehat{\rho}_0} \exp\frac{1}{\theta}\left[\psi(a, \theta, t) - (\widehat{H}_0 + a\widehat{F}_\lambda)\right]\right\} = 1. \tag{4}$$

Выражение

$$\widehat{\rho}_t = \frac{\widehat{W}_0}{\widehat{\rho}_0} \exp\frac{1}{\theta}\left[\psi(a, \theta, t) - (\widehat{H}_0 + a\widehat{F}_t)\right] \tag{5}$$

можно рассматривать как оператор матрицы плотности для некоторого неравновесного процесса, описываемого уравнением движения

$$\frac{\partial \widehat{\rho}_t}{\partial t} = [\widehat{H}, \widehat{\rho}_t].$$

Этот неравновесный ансамбль может быть образован из равновесного с гамильтонианом $\widehat{H}_0 + a\widehat{F}_t$ путем фиксации переменных $\widehat{F}$ в момент λ и задаваемой операторной функций $\frac{\widehat{W}_0}{\widehat{\rho}_0}$. Таким образом $\psi(a, \theta, t)$ играет роль свободной энергии ансамбля (5). Если бы $\widehat{\rho}_0 = \widehat{W}_0$, то ансамбль (5) являлся бы равновесным, и, следовательно, средние значения $\overline{\widehat{F}^{(n)}} = 0$. Но при $\widehat{\rho}_0 \neq \widehat{W}_0$ ансамбль (5) неравновесный, и средние $\overline{\widehat{F}^{(n)}} \neq 0$.

Дифференцируя выражение (4) по a, используя результаты производной операторной функции в [12], найдем:

$$\frac{\partial\psi(a, \theta, t)}{\partial a} = \overline{\hat{F}_t}^a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^n \overline{F_t^{(n)}}^a, \tag{6}$$

где черта с индексом a означает усреднение по ансамблю (5).

Дифференцируя (4) по времени t, получаем

$$\frac{\partial\psi(a, \theta, t)}{\partial\lambda} = a\overline{\dot{F}_\lambda}^a, \tag{7}$$

которое совпадает с классическим выражением [2, 3].

Рассмотрим вспомогательную функцию K

$$K(\xi, a, t) = \mathrm{sp}\{e^{-i\xi\hat{F}_t}\hat{\rho}_t\} = \overline{\exp\{-i\xi\hat{F}_t\}}^a. \tag{8}$$

Из определений (2) и (8) заметим, что характеристическая функция (2) связана (8) следующим образом:

$$\varphi(\xi, t) = K(\xi, 0, t). \tag{9}$$

Если операторы $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_s$ коммутируют друг с другом, то моменты распределения (5) равны

$$\overline{\hat{F}_1^{n_1} \ldots \hat{F}_s^{n_s}}^a = i^{n_1+\ldots+n_s} \left.\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s} K}{\partial\xi_1^{n_1} \ldots \partial\xi_s^{n_s}}\right|_{\xi=0}. \tag{10}$$

Когда $a=0$, выражение (10) совпадает с (3). Таким образом, если функция K определена, мы можем найти плотность вероятности перехода и моменты системы.

Рассмотрим случай неравновесного стационарного процесса (оператор матрицы плотности зависит только от разности времени $\tau = t_1 - t_2$, $[\hat{\rho} = \hat{\rho}(\tau)]$). Далее будем рассматривать линейные диссипативные системы, поэтому всюду для произвольного оператора $\hat{A}$ можно считать [1]:

$$\overline{\hat{A}_t^{(n)}}^a = [\overline{\hat{A}_t}^a]^{(n)}.$$

Аналогично [6, 7] найдем:

$$\frac{1}{2}\overline{[\hat{A}_t, \hat{F}_t - \hat{F}_0]_+}^a - \overline{\hat{A}_t}^a \cdot \overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a = -\theta\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial a}[\overline{\hat{A}_t}^a]^{(2m)} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial\overline{\hat{A}_t^{(2m)}}^a}{\partial a}\right\} = -\theta\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial a}[\overline{\hat{A}_t}^a]^{(2m)} - \frac{\partial}{\partial a}[\overline{\hat{A}_t}^a]^{(2m)}_{t=0}\right\}. \tag{11}$$

Второй член правой части этого выражения относится к равновесному ансамблю с гамильтонианом $\hat{H}_0 + a\hat{F}_t$. Считая, что $\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0} = 0$, из (11) получаем выражение

[1] Это выражение может быть доказано дифференцированием по времени формулы $\overline{\hat{A}_t}^a = sp\{\hat{A}_t\,\hat{\rho}_t\}$, если пренебречь членами, содержащими a.

$$\frac{1}{2}\overline{[\hat{A}_t, \hat{F}_t - \hat{F}_0]_+} = -\theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m} \times$$

$$\times \left\{\frac{\partial}{\partial a}[\overline{\hat{A}_t}^a]^{(2m)} - \frac{\partial}{\partial a}[\overline{\hat{A}_t}^a]^{(2m)}_{t=0}\right\}_{a=0}, \qquad (12)$$

черта в левой части означает усреднение по равновесному ансамблю с гамильтонианом $\hat{H}_0$. В силу обратимости уравнений движения по времени из (12) получаем

$$2\theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m} \left\{\frac{\partial [\overline{\hat{F}_i(t)}^a]^{(2m)}}{\partial a_k} - \frac{\partial [\overline{\hat{F}_i(t)}^a]^{(2m)}_{t=0}}{\partial a_k}\right\}_{a=0} =$$

$$= 2\theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m} \left\{\frac{\partial [\overline{\hat{F}_k(t)}^a]^{(2m)}}{\partial a_i} - \frac{\partial [\overline{\hat{F}_k(t)}^a]^{(2m)}_{t=0}}{\partial a_i}\right\}_{a=0}. \qquad (13)$$

В случае $\hat{A}_t = (\hat{F}_t - \hat{F}_0)^{n-1}$ из (11) имеем

$$\overline{(\hat{F}_t - \hat{F}_0)^n}^a = \left[\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a - \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial a} p^{2m} - \frac{\partial}{\partial a} p^{2m}_{t=0}\right)\right]^n \cdot 1,$$

где $p = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Поэтому функция K равна

$$K = \overline{\exp[-i\xi(\hat{F}_t - \hat{F}_0)]}^a =$$

$$= \exp\left\{-i\xi\left[\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a - \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial a} p^{2m} - \frac{\partial}{\partial a} p^{2m}_{t=0}\right)\right]\right\} \cdot 1.$$

Воспользовавшись соотношением оператора (13)

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}},$$

найдем выражение характеристической функции.

$$\varphi = K(\xi, 0, t) = \exp\left\{\frac{\xi^2\theta}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m}\left[\frac{\partial}{\partial a}(\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a)^{(2m)} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial a}(\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a)^{(2m)}_{t=0}\right]\right\}_{a=0} \exp\{-i\xi(\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a)\}_{a=0}. \qquad (14)$$

Таким образом, если известен момент $\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a$, вычисленный по неравновесному ансамблю (5), то можно вычислить характеристическую функцию φ, а следовательно W. Момент $\overline{\hat{F}_t - \hat{F}_0}^a$ может быть определен из макроскопического опыта, или из усредненного уравнения движения.

Вычисление плотности вероятности перехода обобщенных координат

В случае $\widehat{F}=\widehat{Q}$ (обобщенные координаты) имеем

$$\varphi(\xi, t)=\exp\left\{\frac{\xi^2\theta}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m}\left[\frac{\partial}{\partial a}\overline{(\widehat{Q}_t-\widehat{Q}_0)}^{a\,(2m)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial a}\overline{(\widehat{Q}_t-\widehat{Q}_0)}^{a\,(2m)}_{t=0}\right\}_{a=0}\exp\{-i\xi\overline{(\widehat{Q}_t-\widehat{Q}_0)}^{a}\}_{a=0}.$$

Предположим, что среднее $\overline{\widehat{Q}}_t^a$ удовлетворяет усредненному уравнению движения с дополнительной силой a. Аналогично классическому случаю, это предположение становится справедливым по истечении времени перемешивания ансамбля. Тогда из усредненных уравнений движения можно найти функцию φ, а следовательно W. Например, рассмотрим свободное движение квантовой броуновской частицы. Из ее усредненного уравнения движения под действием дополнительной силы $-a$ получим

$$m\ddot{\overline{q}}_t^a+\gamma\dot{\overline{q}}_t^a=-a$$

$$\overline{q}_t^a=-\frac{at}{\gamma}-\frac{am}{\gamma^2}(e^{-\frac{\gamma t}{m}}-1)+q_0.$$

Найдем

$$\varphi(\xi, t)=\exp\left\{-\xi^2\left[\frac{\theta t}{\gamma}+\frac{\hbar}{2\gamma}(e^{-\frac{\gamma t}{m}}-1)\operatorname{ctg}\frac{\hbar\gamma}{2\theta m}\right]\right\}.$$

Таким образом, из (1) получим плотность вероятности координаты

$$W(q-q_0, t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi f(\theta, t)}}\exp\left[-\frac{(q-q_0)^2}{4f(\theta, t)}\right], \tag{15}$$

где

$$f(\theta, t)=\frac{\theta t}{\gamma}+\frac{\hbar}{2\gamma}(e^{-\frac{\gamma t}{m}}-1)\operatorname{ctg}\frac{\hbar\gamma}{2\theta m}.$$

Из (15) найдем выражение среднего квадрата смещения квантовой броуновской частицы, которое было получено ранее в [6, 7], а также выражения моментов.

В диффузионном режиме $\left(t\gg\frac{m}{\gamma}\right)$ уравнение (15) принимает вид

$$W(q-q_0, t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{(q-q_0)^2}{4Dt}\right],$$

т. е. в этом режиме квантовые свойства не появляются. В том случае, когда броуновская частица находится в поле тяжести

$$m\ddot{\overline{q}}_t^a+\gamma\dot{\overline{q}}_t^a=mg-a$$

без труда находим

$$W(q-q_0, t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi f(\theta, t)}}\exp\left\{-\frac{[q-q_0-Q(t)]^2}{4f(\theta, t)}\right\}, \tag{16}$$

где $f(\theta, t)$ — выше написанная функция, и

$$Q(t) = \frac{mg}{\gamma} t + \frac{m^2 g}{\gamma^2} \left(e^{-\frac{\gamma t}{m}} - 1\right).$$

Выражения (15) и (16) описывают гауссово распределение.

Уравнение движения для плотности вероятности перехода

Рассмотрим броуновскую частицу под действием постоянной внешней силы F. Усредненное уравнение движения частицы при пренебрежении силами инерции имеет вид

$$\gamma \dot{\overline{Q}}{}_t^a = F - a. \tag{17}$$

В квантовом случае, дифференцируя выражение (14) по времени t и используя уравнение (17), получаем уравнение для характеристической функции φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\xi^2 \theta}{\gamma} \varphi - \frac{i \xi F}{\gamma} \varphi.$$

Используя преобразование (1), найдем уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \left(\theta \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} - F \frac{\partial W}{\partial q} \right). \tag{18}$$

Поэтому для квантовой линейной системы в диффузионном режиме в случае постоянной силы уравнение движения для плотности вероятности перехода имеет такой же вид, как и в классическом случае. Когда внешняя сила зависит от координаты, вывод уравнения движения для плотности вероятности перехода методом Гиббса затруднен, так как представление моментов $\overline{Q^{n}}^{a}$ через функцию φ математически сложно.

Вычисление стационарной плотности вероятности

Стационарная плотность вероятности величин $F_1, F_2, \ldots, F_s$ выражается через характеристическую функцию $\varphi_0(\xi)$ формулой

$$W_0(F) = \frac{1}{(2\pi)^s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi F} \varphi_0(\xi)\, d\xi, \tag{19}$$

где

$$\varphi_0(\xi) = \mathrm{sp} \left\{ \exp[-i\xi \hat{F}] \exp\left[\frac{\psi - \hat{H}_0}{\theta}\right] \right\}.$$

Если операторы $\hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_s$ коммутируют друг с другом, то моменты выражаются

$$\overline{\hat{F}_1^{n_1} \ldots \hat{F}_s^{n_s}} = i^{n_1 + \ldots + n_s} \left. \frac{\partial^{n_1 + \ldots + n_s} \varphi_0}{\partial \xi_1^{n_1} \ldots \partial \xi_s^{n_s}} \right|_{\xi = 0}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_0(\xi, a) = \mathrm{sp} \left\{ \exp[-i\xi \hat{F}] \exp\left[\frac{\psi - \hat{H}_0 - a\hat{F}}{\theta}\right] \right\} = \overline{\exp(-i\xi \hat{F})}^{a_{\text{рав}}}, \tag{20}$$

где черта с индексом $a_{\text{рав}}$ означает усреднение по равновесному ансамблю с гамильтонианом $\widehat{H}_0 + a\widehat{F}$. Из выражения (20) заметим, что

$$\varphi_0(\xi) = K_0(\xi, 0).$$

Таким образом, если функция $K_0(\xi, a)$ определена, то характеристическая функция $\varphi_0(\xi)$, плотность вероятности W_0 и моменты определены.

Аналогичным же путем, как сделано в [6, 7], и согласно (11) найдем выражение

$$\frac{1}{2}\overline{[\widehat{A}, \widehat{F}]_+}^{a_{\text{рав}}} - \overline{\widehat{A}}^{a_{\text{рав}}} \cdot \overline{\widehat{F}}^{a_{\text{рав}}} = -\theta\,\frac{\partial \overline{\widehat{A}}^{a_{\text{рав}}}}{\partial a} +$$

$$+ \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m} \frac{\partial \overline{\widehat{A}^{(2m)}}^{a_{\text{рав}}}}{\partial a} =$$

$$= -\theta\,\frac{\partial \overline{\widehat{A}}^{a_{\text{рав}}}}{\partial a} + \theta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m} \frac{\partial}{\partial a}\,[\overline{\widehat{A}}^{a_{\text{нер}}}]^{(2m)}_{t=0}, \tag{21}$$

где черта с индексом $a_{\text{нер}}$ означает усреднение по неравновесному ансамблю (5) ($\widehat{W}_0 \neq \widehat{\rho}_0$). Предположим, что в начальный момент $t = 0$ система с гамильтонианом $\widehat{H}_0 + a\widehat{F}$ находится в равновесном состоянии. После включения операторной функции $\frac{\widehat{W}_0}{\widehat{\rho}_0}$ система выходит из равновесного состояния и совершает неравновесный процесс. Таким образом, среднее значение произвольной величины по равновесному ансамблю должно равняться ее среднему значению по неравновесному при $t = 0$

$$\overline{\widehat{A}}^{a_{\text{рав}}} = \overline{\widehat{A}}^{a_{\text{нер}}}_{t=0}. \tag{22}$$

Аналогично тому, как сделано выше, из (21) и (22) найдем выражение характеристической функции

$$\varphi_0 = K(\xi, 0) = \exp\left\{\frac{\xi^2\theta}{2}\left[-\frac{\partial \overline{\widehat{F}}^{a_{\text{рав}}}}{\partial a} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left(\frac{i\hbar}{\theta}\right)^{2m} \frac{\partial}{\partial a}\,(\overline{\widehat{F}_t}^{a_{\text{нер}}})^{(2m)}_{t=0}\right]\right\}_{a=0} \exp\{-i\xi\overline{\widehat{F}}^{a_{\text{рав}}}\}_{a=0}. \tag{23}$$

Поэтому с помощью усредненных уравнений движения можем вычислять функцию $\varphi_0(\xi)$, тогда преобразованием (19) стационарная плотность вероятности W_0 будет определена.

В качестве примера вычислим стационарную плотность вероятности координаты гармонического квантового осциллятора. Его усредненное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\overline{q}}_t^{\,a} + w^2\overline{q}_t^{\,a} = -\frac{a}{m},$$

$$\overline{q}_t^{\,a} = \left(q_0 - \frac{a}{mw^2}\right)\cos wt - \frac{a}{mw^2},$$

таким образом,

$$\varphi_0(\xi) = \exp\left\{-\frac{\xi^2\hbar}{4m\omega}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right\},$$

$$W_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\operatorname{th}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right)^{1/2}\exp\left\{-q^2\frac{m\omega}{\hbar}\operatorname{th}\frac{\hbar\omega}{2\theta}\right\}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным обычным методом в квантовой статистике (формула Блоха).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за руководство работой и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Терлецкий Я. П. Статистическая физика, М., «Высш. школа», 1966.
2. Magalinsky V. B., Terletsky Ia. P. Ann. Phys., 5, 296, 1960.
3. Магалинский В. Б., Терлецкий Я. П., ЖЭТФ, 34, 729, 1958.
4. Магалинский В. Б., Терлецкий Я. П. ЖЭТФ, 36, 1731, 1959.
5. Магалинский В. Б. ЖЭТФ, 36, 1423, 1959.
6. Нгуен Танг. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ. астрон., № 3, 78, 1967.
7. Terletsky Ia. P., Ngueyen Tang. Ann. Phys., 19, 299, 1967.
8. Terletsky Ia. P. Nuovo Cim., 7, 308, 1958.
9. Милантьев В. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 71, 1960.
10. Стратонович Р. Л. ЖЭТФ, 39, 1647, 1960.
11. Терлецкий Я. П. Динамические и статистические законы физики. Изд-во МГУ, 1949.
12. Киржниц Д. А. Полевые методы теории многих частиц, М., «Госатомиздат», 1963.
13. Glauber R. Phys. Rev., 84, 395, 1951.

Поступила в редакцию
10.11 1966 г.

Кафедра
теоретической физики