Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1968

УДК 530.145

В. А. ТУРИКОВ

О РАСПЛЫВАНИИ ПОЛЕВЫХ СГУСТКОВ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассматриваются решения уравнений Клейна—Гордона и Прока в виде полевых сгустков. Под полевым сгустком понимается классическое поле, амплитуда которого локализована в ограниченной области пространства. Вводится понятие ширины полевого сгустка и исследуется зависимость этой ширины от времени.

Обычно в курсах квантовой механики приводятся элементарные соображения о движении и расплывании волновых пакетов, являющихся решениями уравнения Шредингера.

Движение спинорного волнового пакета было исследовано еще Шредингером [1] и Фоком [2].

В частности, Шредингер показал, что в движении центра тяжести спинорного волнового пакета проявляется «дрожание», обусловленное интерференцией волн, принадлежащих положительным и отрицательным энергиям.

В работе Серебряного [3] рассматривался вопрос о движении и расплывании пакета общего вида

$$\psi(\vec{r}, t) = \int g(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\vec{r} + i\omega(\vec{k})t}\, d^3k. \qquad (1)$$

Координаты центра тяжести такого пакета определялись как компоненты вектора

$$\bar{x}_\alpha = \frac{\int x_\alpha \psi^* \psi\, d^3x}{\int \psi^* \psi\, d^3x},$$

а за меру ширины принималась величина

$$\overline{(\Delta x_\alpha)^2} = \frac{\int (x_\alpha - \bar{x}_\alpha)^2\, \psi^* \psi\, d^3x}{\int \psi^* \psi\, d^3x}.$$

Будем проводить аналогичное исследование, но уже не для волновых пакетов вида (1), а для полевых функций скалярного и векторного полей, локализованных в ограниченной области пространства.

Будем считать эти полевые функции непрерывными, достаточное число раз дифференцируемыми и быстро убывающими на больших расстояниях. Поэтому все встречающиеся в дальнейшем интегралы предполагаются сходящимися.

Результаты работы [3] не могут быть механически перенесены на наш случай, так как решение уравнения Клейна—Гордона

$$(\Box - k_0^2)\,\psi = 0 \qquad (2)$$

имеет вид

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [A(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\vec{r} - icKt} + B(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\vec{r} + icKt}]\, d^3k,$$

где $K = \sqrt{\vec{k}^2 + k_0^2}$. К тому же в этом случае величина $\psi^*\psi$ не имеет простого физического смысла и интеграл от нее по всему пространству зависит от времени.

Назовем координатами центра тяжести полевого сгустка величины

$$x_\alpha = \frac{\int x_\alpha W\, d^3x}{\int W\, d^3x} = \frac{\int x_\alpha T_{44}\, d^3x}{\int T_{44}\, d^3x}, \qquad (3)$$

где под $W = -T_{44}$ понимается плотность энергии поля. Здесь $T_{\mu\nu}$ — симметризованный тензор энергии-импульса. Симметрия $T_{\mu\nu}$ следует из уравнения непрерывности для четырехмерной плотности момента поля [4]

$$M_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{ic}\{T_{\lambda\mu}x_\nu - T_{\lambda\nu}x_\mu\}.$$

Для того чтобы получить временную зависимость величины (3), воспользуемся законом сохранения для компонента $M_{4\mu 4}$

$$\int M_{4\alpha 4}\, d^3x = P_\alpha ict - \frac{1}{ic}\int T_{44}x_\alpha\, d^3x = \text{const}, \qquad (4)$$

где $x_4 = ict$, а $P_\alpha = \frac{1}{ic}\int T_{4\alpha}\, d^3x$ есть импульс поля; ($\alpha = 1, 2, 3$). Поделив обе части равенства (4) на энергию поля E, получаем

$$\frac{\int x_\alpha T_{44}\, d^3x}{\int T_{44}\, d^3x} = \frac{P_\alpha c^2}{E}\, t + \text{const}.$$

Следовательно, величина $\vec{v} = \frac{c^2\vec{P}}{E}$ является скоростью движения центра тяжести полевого сгустка. Такое же соотношение между скоростью, импульсом и энергией имеет место для свободной частицы в релятивистской механике.

Из выражения для плотности энергии, соответствующей скалярному и векторному полям [4], видно, что энергия рассматриваемых нами полевых сгустков отлична от нуля во всех системах отсчета. В частности, $E = E_0 > 0$ в системе, где $\vec{P} = 0$. Отсюда, исходя из векторного характера величин $\{\vec{P}, \frac{i}{c}E\}$, заключаем, что $v < c$.

В соответствии с (3), ширину полевого сгустка естественно определить как

$$\overline{(\Delta x_\alpha)^2} = \frac{\int (x_\alpha - \overline{x_\alpha})^2\, T_{14}\, d^3x}{\int T_{14}\, d^3x}.$$

Очевидно,

$$\overline{(\Delta x_\alpha)^2} = \overline{x_\alpha^2} - \bar{x}_\alpha^2, \tag{5}$$

где

$$\overline{x_\alpha^2} = \frac{\int x_\alpha^2 T_{44}\, d^3x}{\int T_{44}\, d^3x}. \tag{6}$$

Дифференцируя выражение (6) два раза по времени и интегрируя по частям с учетом уравнения непрерывности для $T_{\mu\nu}$ и условия симметрии $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, получаем

$$\ddot{\overline{x_\alpha^2}} = \frac{2c^2}{E} \int T_{\alpha\alpha}\, d^3x. \tag{7}$$

Воспользуемся этим соотношением для нахождения зависимости $\overline{x_\alpha^2}$ от времени. Рассмотрим, например, $\overline{x_1^2}$. В случае комплексного скалярного поля имеем [4]

$$T_{11} = \frac{\partial\psi^*}{\partial x_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - k_0^2\psi^*\psi.$$

Используя обычный прием [5] для вычисления величин типа

$$\int \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} d^3x, \quad \int \psi^*\psi\, d^3x.$$

с учетом

$$\int e^{-i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}}\, d^3x = (2\pi)^3\, \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

можно получить

$$\int T_{11}\, d^3x = 2\int k_1^2 \left(A^*(\vec{k})\, A(\vec{k}) + B^*(\vec{k})\, B(\vec{k})\right) d^3k +$$
$$+ 2\int (k_1^2 - K^2)\left(A^*(\vec{k})\, B(\vec{k})\, e^{i2cKt} + B^*(\vec{k})\, A(\vec{k})\, e^{-i2cKt}\right) d^3k. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\frac{2c^2}{E}\int k_1^2 \left(A^*(\vec{k})\, A(\vec{k}) + B^*(\vec{k})\, B(\vec{k})\right) d^3k = A,$$

$$\frac{4c^2}{E} k_1^2 A^*(\vec{k})\, B(\vec{k}) = g_1(\vec{k}), \quad \frac{4c^2}{E} k_1^2 B^*(\vec{k})\, A(\vec{k}) = g_2(\vec{k}), \quad \omega = 2cK.$$

Тогда (8) примет вид

$$\ddot{\overline{x_1^2}} = 2A + \int \left\{g_1(\vec{k})\, e^{i\omega(\vec{k})t} + g_2(\vec{k})\, e^{-i\omega(\vec{k})t}\right\} d^3k. \tag{9}$$

Очевидно, A всегда положительно.

Интегрируя по времени дифференциальное уравнение (9), получим

$$\overline{x_1^2} = At^2 + Bt + C + f(t).$$

Здесь

$$f(t) = -\int \left(\frac{g_1}{\omega^2} e^{i\omega t} + \frac{g_2}{\omega^2} e^{-i\omega t}\right) d^3k. \tag{10}$$

Из (10) видно, что $f(t)$ является ограниченной функцией времени, так как ограничена во времени функция, стоящая под знаком интеграла.

Учитывая (5), имеем

$$\overline{(\Delta x_1)^2} = Dt^2 + Ft + N + f(t), \tag{11}$$

где $D = A - v_1^2$.

Аналогичным образом можно исследовать векторное поле, уравнения которого имеют вид [4]

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = k_0^2 \psi_\nu, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{12}$$

Здесь

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu} = -f_{\nu\mu}. \tag{13}$$

Величина $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$ является 4-вектором, причем $\psi_4 = i\psi_0$, $\psi_4^* = i\psi_0^*$. Компоненты полевой функции связаны условием Лоренца

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \tag{14}$$

Для вычисления $\overline{x_1^2}$ снова воспользуемся формулой (7). T_{11} для векторного поля имеет вид [4]

$$T_{11} = f_{12}^* f_{12} + f_{13}^* f_{13} + f_{14}^* f_{14} - f_{23}^* f_{23} - f_{24}^* f_{24} - f_{34}^* f_{34} + \\ + k_0^2 \psi_1^* \psi_1 - k_0^2 (\psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4).$$

Интегрируя по частям, с учетом (13), получим

$$\int f_{\alpha\beta}^* f_{\alpha\beta}\, d^3x = -\int \left(\psi_\beta^* \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + \psi_\alpha^* \frac{\partial f_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} \right) d^3x, \tag{15}$$

$$\int f_{\alpha 4}^* f_{\alpha 4}\, d^3x = -\int \left(\psi_4^* \frac{\partial f_{\alpha 4}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial t} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial t} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_\alpha} \right) d^3x, \tag{16}$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$[1].

С помощью этих формул и уравнений поля (12), производя несложные выкладки, приходим к выражению

$$\int T_{11}\, d^3x = I_0 - I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_0 = -2 \int \left\{ \psi_2^* \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} + \psi_3^* \frac{\partial f_{13}}{\partial x_1} + \psi_4^* \frac{\partial f_{14}}{\partial x_1} \right\} d^3x, \tag{17}$$

$$I_\alpha = \int \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial t} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial t} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{c^2} \psi_\alpha^* \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \psi_\alpha^* \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t\, \partial x_1} \right\} d^3x.$$

После интегрирования по частям (17) приобретает вид

$$I_0 = \int \left\{ \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_3^*}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_3^*}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \psi_4^*}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_4^*}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4} \right\} d^3x.$$

[1] В формулах (15) и (16) суммирования по повторяющимся индексам не подразумевается.

Используя условия Лоренца (14) для второго и четвертого слагаемых в этом интеграле, окончательно получаем

$$I_0 = 2\int\left(\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial\psi_\mu^*}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi_0}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\psi_0^*}{\partial x_1\,\partial t}\psi_1\right)d^3x.$$

Каждый компонент ψ_μ удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона (2), следовательно

$$\psi_\mu = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int [A_\mu(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}\vec{r}-icKt} + B_\mu(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}\vec{r}+icKt}]\,d^3k, \tag{18}$$

причем $A_4 = iA_0$, $A_4^* = iA_0^*$, $B_4 = iB_0$, $B_4^* = iB_0^*$.

Подставляя (18) в выражения для I_0 и I_α и интегрируя обычным способом, получаем

$$I_0 = 2\int k_1^2 \sum_{\mu=1}^{4}(A_\mu^* A_\mu + B_\mu^* B_\mu)\,d^3k + 2\int k_1^2\sum_{\mu=1}^{4}(A_\mu^* B_\mu e^{i2cKt} + B_\mu^* A_\mu e^{-i2cKt})d^3k +$$

$$+ 4\int k_1 K\,(B_0^* A_1 e^{-i2cKt} - A_0^* B_1 e^{i2cKt})\,d^3k,$$

$$I_\alpha = -2\int K^2(A_\alpha^* B_\alpha e^{i2cKt} + B_\alpha^* A_\alpha e^{-i2cKt})\,d^3k -$$

$$-2\int k_\alpha K\,(A_\alpha^* B_0 e^{i2cKt} - B_\alpha^* A_0 e^{-i2cKt})\,d^3k.$$

Значит и для векторного поля

$$\ddot{\overline{x_1^2}} = \frac{2c^2}{E}\int T_{11}\,d^3x = 2A + \int (g_1 e^{i\omega t} + g_2 e^{-i\omega t})\,d^3k,$$

т. е.

$$\overline{x_1^2} = At^2 + Bt + C + f(t).$$

Здесь

$$A = \frac{2c^2}{E}\int k_1^2(\vec{A}^*\vec{A} + \vec{B}^*\vec{B} - A_0^* A_0 - B_0^* B_0)\,d^3k, \tag{19}$$

а $f(t)$ является как и прежде ограниченной функцией.

В силу условия Лоренца квадратичная форма, стоящая под знаком интеграла в (19), положительно определена [5]. Значит, коэффициент A всегда отличен от нуля.

Для ширины сгустка векторного поля получим формулу (11).

Как частный случай из полученных результатов (при $k_0=0$) и действительных ψ_μ вытекают аналогичные формулы для сгустка электромагнитного поля.

Чтобы упростить запись, мы рассматривали только величину $\overline{(\Delta x_1)^2}$. Точно такие же формулы можно получить для ширины сгустка в произвольном направлении. Для этого нужно преобразовать систему координат так, чтобы одна из осей совпала с этим направлением.

Итак, мы установили, что сгустки скалярного и векторного полей будут расплываться со временем по закону (11).

В заключение хочу выразить глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за предложенную тему и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schrödinger E. Berl. Ber., Nr. 24, 418—428, 1930.
2. Fock V. Z. S. Phys., **55**, Nr. 2, 127—140, 1929.
3. Серебряный Р. В. ЖЭТФ, **20**, 1130, 1950.
4. Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей. М., Гостехиздат, 1947.
5. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.

Поступила в редакцию
6. I 1967 г.

Кафедра
теоретической физики