Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1968

УДК 538.3:621.372.853.1

ПАК КВАН ИР

О ДИПОЛЬНО-ПОВЕРХНОСТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НА ГРАНИЦЕ ДИЭЛЕКТРИК—ВАКУУМ

Рассматривается вопрос о дипольно-поверхностных колебаниях в цилиндрическом волноводе с диэлектрическим стержнем.

Механизм распространения электромагнитных волн в диэлектрической среде при наличии границы приводит к картине дипольной поляризации или поверхностных связанных зарядов на границе диэлектрик—вакуум. Система диполей на поверхности взаимодействует кулоновскими силами. С точки зрения механики система диполей, взаимодействующих между собой кулоновскими силами, должна характеризоваться наличием дипольного возбуждения, так как кулоновские силы играют роль упругих сил, т. е. должны существовать дипольные волны, не связанные с конечной скоростью распространения электромагнитных волн c и обусловленные только параметрами системы диполей [1]. Возникает вопрос: каким образом эти дипольно-поверхностные волны входят в феноменологическую теорию [2, 3] распространения электромагнитных волн при наличии границы диэлектрика с вакуумом? Входят ли дипольно-поверхностные колебания в феноменологическую теорию вообще? И если входят, то какова их роль в процессе распространения волн? В настоящей статье выясняются все эти вопросы для цилиндрического волновода с диэлектрическим стержнем.

Исходные уравнения

Рассмотрим случай однородного диэлектрика

$$\varepsilon = \mathrm{const}, \quad \mu = 1, \quad \sigma = 0.$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость. При этом уравнения Максвелла, которые являются исходными для нашей задачи, принимают вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1\partial H}{c\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\varepsilon\,\partial \vec{E}}{c\,\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0$$

внутри диэлектрика и

$$\operatorname{rot}\vec{E}' - \frac{1\partial\vec{H}'}{c\,\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{E}' = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}' = \frac{1\partial\vec{E}'}{c\,\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{H}' = 0$$

вне диэлектрика.

Из них можно получить

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\varepsilon\partial^2\vec{E}}{c^2\,\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2\vec{E}' - \frac{1\partial^2\vec{E}'}{c\,\partial t^2} = 0,$$

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{\varepsilon\partial^2\vec{H}}{c^2\,\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2\vec{H}' - \frac{1\partial^2\vec{H}'}{c\partial t^2} = 0.$$

В цилиндрических координатах получим $q = q(r)\,e^{i(\omega t + n\varphi - kz)}$ и для продольных составляющих:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \left(\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)E_z = 0,$$

$$\frac{\partial^2 E_z'}{\partial r^2} + \frac{1\,\partial E_z'}{r\,\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)E_z' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \left(\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)H_z = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_z'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z'}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)H_z' = 0.$$

Решение этих уравнений допускает существование двух групп волн. Быстрые волны $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0, \text{ т. е. } v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} > c^2\right)$.

В этом случае в качестве решений выступают

$$E_z = J_0 J_n(\eta r), \quad E_z' = \mathscr{E}_0' J_n(\eta' r) + E_0' N_n(\eta' r)$$

$$H_z = H_0 J_n(\eta r), \quad H_z' = \mathscr{H}_0' J_n(\eta' r) + H_0' N_n(\eta' r),$$

где J_n — функция Бесселя, N_n — функция Неймана,

$$\eta^2 = \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad \eta'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \text{ и } E_0,\ \mathscr{E}_0',\ E_0',\ H_0,$$

$\mathscr{H}_0'$, H_0' — некоторые амплитуды электрического и магнитного полей внутри и вне диэлектрика.

Медленные волны $\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0, \text{ т. е. } v_\Phi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} < c^2\right)$. В этом случае решениями исходных уравнений являются

$$E_z = E_0 I_n(\zeta r), \quad E_z' = \mathscr{E}_0' I_n(\zeta' r) + E_0' K_n(\zeta' r), \quad H_z = H_0 I_n(\zeta r),$$

$$H_z' = \mathscr{H}_0' I_n(\zeta' r) + H_0' K_n(\zeta' r),$$

где I_n, K_n — модифицированные функции Бесселя,

$$\zeta^2 = k^2 - \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \zeta'^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Из найденных выше решений нетрудно отыскать остальные составляющие.

Граничные условия

Пусть $r=R$ есть радиус диэлектрического стержня, и $r=R_1$ есть радиус коаксиального с ним идеально проводящего кожуха. Тогда граничные условия для составляющих электромагнитного поля имеют вид

$$(D'_r - D_r)|_{r=R} = 0, \qquad (1) \qquad\qquad (H'_\varphi - H_\varphi)|_{r=R} = 0, \qquad (5)$$

$$(E'_\varphi - E_\varphi)|_{r=R} = 0, \qquad (2) \qquad\qquad (H'_z - H_\varphi)|_{r=R} = 0, \qquad (6)$$

$$(E'_z - E_z)|_{r=R} = 0, \qquad (3) \qquad\qquad E'_z|_{r=R_1} = 0, \qquad (7)$$

$$(H'_r - H_r)|_{r=R} = 0, \qquad (4) \qquad\qquad E'_\varphi|_{r=R_1} = 0. \qquad (8)$$

Учитывая, что

$$D'_r = E'_r, \; D_r = \varepsilon E_r = E_r + 4\pi P_r, \quad P_r = -Ne\,\delta r,$$

где e — заряд электрона, N — число атомов в единице объема, δr — смещение электрона в атоме, условие (1) можно переписать

$$(E'_r - E_r)|_{r=R} = -\frac{m}{e}\,\omega_0^2\,\delta r\,|_{r=R}. \qquad (1')$$

Здесь $\omega_0^2 = \dfrac{4\pi N e^2}{m}$, m — масса электрона.

Составим уравнение движения электрона в атоме

$$m\frac{\partial^2 \delta r}{\partial t^2} + \varkappa \delta r = -eE_r,$$

где $\varkappa$ — коэффициент упругости, характерный для данного диэлектрика. Предполагая, что $\delta r\,|_{r=R} = R\alpha_1 e^{i(\omega t + n\varphi - kz)}$, и вводя обозначение $\dfrac{\varkappa}{m} = \omega_1^2$ (частота собственных колебаний диэлектрика), из этого уравнения получим условие

$$\frac{m}{e}(\omega^2 - \omega_1^2)\,\delta r\,|_{r=R} - E_r|_{r=R} = 0. \qquad (9)$$

Итак, имеются 9 соотношений, которые должны обязательно выполняться на границах $r=R$ и $r=R_1$. Но условие (4) является следствием из (2) и (3) и условие (1) является следствием из (5), (6) и (9). Таким образом, в качестве независимых соотношений могут выступать условия (2), (3), (5), (6), (7), (8) и (9), что вполне достаточно для определения 7 неизвестных величин E_0, $\mathcal{E}_0$, E'_0, H_0, $\mathcal{H}_0$, H'_0, α_1.

Отметим, что условия (1′) и (9) дают возможность определить зависимость ε от ω:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

При $P_r/_{r=k}=0$ (т. е. $\alpha_1=0$) условие (1′) вырождается и приобретает вид

$$(E_r' - E_r)\big|_{r=R} = 0, \tag{1″}$$

который уже не является следствием из (5) и (6). Тогда для 6 неизвестных величин E_0, $\mathcal{E}_0'$, E_0', H_0, $\mathcal{H}_0'$, H_0' будем иметь 7 независимых условий (1″), (2), (3), (5), (6), (7) и (8), что приведет к неразрешимости системы уравнений. Отсюда следует, что разрешимость граничной задачи с необходимостью диктует наличие дипольных волн на поверхности диэлектрика.

Дисперсионные уравнения

Условие разрешимости системы из 7 независимых уравнений (2), (3), (5), (6), (7), (8) и (9) приводит к дисперсионным уравнениям.

Для быстрых волн

$$\begin{aligned}
&\Big\{-\frac{\omega^2-\omega_1^2-\omega_0^2}{\eta} J_n'(\eta R)\,[N_n(\eta' R)\,J_n(\eta' R_1) - J_n(\eta' R)\,N_n(\eta' R_1)] + \\
&+ \frac{\omega^2-\omega_1^2}{\eta'} J_n(\eta R)\,[N_n'(\eta' R)\,J_n(\eta' R_1) - J_n'(\eta' R)\,N_n(\eta' R_1)]\Big\} \times \\
&\times \Big\{\Big[\frac{1}{\eta} J_n'(\eta R)\,N_n(\eta' R) - \frac{1}{\eta'} N_n'(\eta' R)\,J_n(\eta R)\Big] J_n'(\eta' R_1) - \\
&- \Big[\frac{1}{\eta} J_n'(\eta R)\,J_n(\eta' R) - \frac{1}{\eta'} J_n'(\eta' R)\,J_n(\eta R)\Big] N_n'(\eta' R_1)\Big\} + \\
&+ \frac{\omega^2\omega_0^4 n^2 k}{(\omega^2-\omega_1^2)\,c^2R^2\,\eta^4\eta'^4} J_n^2(\eta R)\,[N_n(\eta' R)\,J_n(\eta' R_1) - J_n(\eta' R)\,N_n(\eta' R_1)] \times \\
&\times [N_n(\eta' R)\,J_n'(\eta' R_1) - J_n(\eta' R)\,N_n'(\eta' R_1)] = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

и для медленных волн

$$\begin{aligned}
&\Big\{-\frac{\omega^2-\omega_1^2-\omega_0^2}{\zeta} I_n'(\zeta R)\,[K_n(\zeta' R)\,I_n(\zeta' R_1) - I_n(\zeta' R)\,K_n(\zeta' R_1)] + \\
&+ \frac{\omega^2-\omega_1^2}{\zeta'} I_n(\eta R)\,[K_n'(\zeta' R)\,I_n(\zeta' R_1) - I_n'(\zeta' R)\,K_n(\zeta' R_1)]\Big\} \times \\
&\times \Big\{\Big[\frac{1}{\zeta} I_n'(\zeta R)\,K_n(\zeta' R) - \frac{1}{\zeta'} K_n'(\zeta' R)\,I_n(\zeta R)\Big] I_n'(\zeta' R_1) - \\
&- \Big[\frac{1}{\zeta} I_n'(\zeta R)\,I_n(\zeta' R) - \frac{1}{\zeta'} (\zeta' R)\,I_n(\zeta R)\Big] K_n'(\zeta' R_1)\Big\} + \\
&+ \frac{\omega^2\omega_0^4 n^2 k^2}{(\omega^2-\omega_1^2)\,c^2R^2\zeta^4\zeta'^4} I_n^2(\zeta R)\,[K_n(\zeta' R)\,I_n(\zeta' R_1) - I_n(\zeta' R)\,K_n(\zeta' R_1)] \times \\
&\times [K_n(\zeta' R)\,I_n'(\zeta' R_1) - I_n(\zeta' R)\,K_n'(\zeta' R_1)] = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь штрих у цилиндрических функций означает дифференцирование по полному аргументу.

Уравнения (10) и (11) говорят о том, что в общем случае в волноводе происходит единый процесс распространения волн, в котором электрический ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) и магнитный ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) типы колебаний переплетаются и сопровождаются поверхностными колебаниями дипольного происхождения.

В случае аксиальной симметрии ($n = 0$) два типа электромагнитных волн разделяются, причем с поверхностными колебаниями связан только электрический тип соотношением, вытекающим из условия (9). Нас интересует именно этот случай.

Быстрые волны электрического типа имеют дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_0^2}{\eta} J_1(\eta R)\left[N_0(\eta' R) J_0(\eta' R_1) - J_0(\eta' R) N_0(\eta' R_1)\right] -$$

$$- \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\eta'} J_0(\eta R)\left[N_1(\eta' R) J_0(\eta' R_1) - J_1(\eta' R) N_0(\eta' R_1)\right] = 0. \qquad (12)$$

и связаны с поверхностными колебаниями соотношением

$$\frac{m}{e}(\omega^2 - \omega_1^2) R\alpha_1 - \frac{ik}{\eta} E_0 J_1(\eta R) = 0.$$

Для (12) существует целый ряд отличных от нуля корней $\eta' = \lambda_1 \lambda_2, \ldots$. Каждому корню λ_i соответствует своя зависимость $\omega_i^2 = c^2 (k^2 + \lambda_i^2)$ между ω и k. Фазовая скорость волны $v_ф = \omega / k$ при заданном λ пробегает значения от ∞ до c, когда k меняется от 0 до ∞.

Медленные волны электрического типа имеют дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_0^2}{\zeta} I_1(\zeta R)\left[K_0(\zeta' R) I_0(\zeta' R_1) - I_0(\zeta' R) K_0(\zeta' R_1)\right] +$$

$$+ \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\zeta'} I_0(\zeta R)\left[K_1(\zeta' R) I_0(\zeta' R_1) + I_1(\zeta' R) K_0(\zeta' R_1)\right] = 0. \qquad (13)$$

Связь с поверхностными колебаниями выражается соотношением

$$\frac{m}{e}(\omega^2 - \omega_1^2) R\alpha_1 - \frac{ik}{\zeta} E_0 I_1(\zeta R) = 0.$$

Анализ (13) показывает, что ω плавно меняется от ω_1 до $\sqrt{\omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2}}$ при изменении k от ω^2/c до ∞. Фазовая скорость волны $v_ф$ принимает при этом значения от c до 0.

В случае, когда $\omega/c \ll k$, в волноводе остаются только поверхностные волны для любого n. Они связаны с электрическим полем потенциального характера соотношением

$$\frac{m}{e}(\omega^2 - \omega_1^2) R\alpha_1 - iE_0 I_n'(kR) = 0.$$

Дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_0^2} = kRI_n'(kR) K_n(kR) - kRI_n'(kR) I_n(kR) \frac{K_n(kR_1)}{I_n(kR_1)}. \qquad (14)$$

Его анализ с учетом условия $\omega/c \ll k$ приводит к выводу, что для достаточно коротких волн ω имеет значение близкое к $\sqrt{\omega_1^2+\frac{\omega_0^2}{2}}$ и фазовая скорость волны $v_ф$ в отличии от c очень мала.

Колебания в данном случае становятся лапласовскими:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U, \qquad \nabla^2 U = 0,$$

$$\vec{E}' = -\operatorname{grad} U', \qquad \nabla^2 U' = 0,$$

где U, U' — электростатические потенциалы внутри и вне диэлектрика. Процесс распространения волн непосредственно связан с поверхностными колебаниями, и все величины выражаются через α_1:

$$E_0 = -\frac{im(\omega^2-\omega_1^2)}{e}\,\frac{R}{I_n'(kR)}\,\alpha_1,$$

$$E_0' = -\frac{im(\omega^2-\omega_1^2)}{e}\,\frac{R}{I_n'(kR)}\,\frac{I_n(kR)}{K_n(kR)-\frac{K_n(kR_1)}{I_n(kR_1)}I_n(kR)}\,\alpha_1,$$

$$\varepsilon_0' = \frac{im(\omega^2-\omega_1^2)}{e}\,\frac{R}{I_n'(kR)}\,\frac{I_n(kR)}{k_n(kR)-\frac{K_n(kR_1)}{I_n(kR_1)}I_n(kR)}\,\frac{K_n(kR_1)}{I_n(kR_1)}\,\alpha_1.$$

Отсюда для потенциалов получим

$$U = -\frac{m(\omega^2-\omega_1^2)}{ek}\,\frac{R\alpha_1}{I_n'(kR)}\,I_n(kr),$$

$$U' = -\frac{m(\omega^2-\omega_1^2)}{ek}\,\frac{R\alpha_1}{I_n'(kR)}\,\frac{I_n(kR)}{K_n(kR)-\frac{K_n(kR_1)}{I_n(kR_1)}I_n(kR)}\times$$

$$\times\left[K_n(kr)-\frac{K_n(kR_1)}{I_n(kR_1)}I_n(kr)\right].$$

Граничные условия для них

$$(U'-U)\big|_{r=R} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U'}{\partial r}-\varepsilon\frac{\partial U}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = 0$$

приводят, как можно было ожидать, к дисперсионному уравнению (14).

В случае чисто азимутальных колебаний ($k=0$) для любого n два типа колебаний в быстрых волнах также разделяются, причем с волнами поверхностных зарядов связан не электрический, а магнитный тип колебаний:

$$\frac{m}{e}(\omega^2-\omega_1^2)R\alpha_1 + \frac{n\omega}{c\eta^2 R}H_0 J_n(\eta R) = 0.$$

Дисперсионное уравнение

$$\left[\frac{1}{\eta}J_n'(\eta R)N_n(\eta' R)-\frac{1}{\eta'}N_n'(\eta' R)J_n(\eta R)\right]J_n'(\eta' R_1) -$$

$$-\left[\frac{1}{\eta}J_n'(\eta R)J_n(\eta' R)-\frac{1}{\eta'}J_n'(\eta' R)J_n(\eta R)\right]N_n'(\eta' R_1) = 0$$

дает для частоты выражение

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\left(1 - \frac{R^{2n}}{R_1^{2n}}\right)}.$$

Заключение

Получены дисперсионные уравнения для цилиндрического волновода с диэлектрическим стержнем. Их анализ показывает, что в общем случае в таком волноводе происходит единый процесс распространения волн, в котором электрический и магнитный типы колебаний переплетаются и сопровождаются дипольно-поверхностными колебаниями.

В случае $n=0$ волны электрического типа отделяется от волн магнитного типа, причем с поверхностными колебаниями связаны волны электрического типа. Они в свою очередь разбиваются на две подгруппы как различные корни соответствующего трансцендентного дисперсионного уравнения. Одна подгруппа (быстрые волны) при $\frac{\omega}{c} < k$ исчезает, в то время как другая подгруппа (медленные волны) переходит в дипольно-поверхностные волны электростатического характера, когда $\frac{\omega}{c} \ll k$. Эти дипольно-поверхностные волны продолжают существовать для любого n.

В случае $k=0$ и $n \neq 0$ два типа колебаний в быстрых волнах также разделяются, причем поверхностные волны возбуждаются теперь уже магнитным типом.

Итак, имеются два вида дипольно-поверхностных колебаний, один из которых возбуждается электромагнитными волнами и распространяется вместе с ними, в то время как другой не связан с поперечными волнами и носит электростатический характер.

Анализ граничных условий позволяет прийти к выводу, что дипольно-поверхностные колебания играют принципиальную роль в процессе распространения волн через волновод с диэлектрическим стержнем, ибо их отсутствие приводит к неразрешимости системы уравнений, вытекающих из граничных условий.

Выражаю благодарность проф. А. А. Власову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. ЖЭТФ, **4**, 1, 24—30, 1934; Власов А. А., Фурсов В. С. ЖЭТФ, **6**, 8, 751—773, 1936.
2. Кацеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М., «Наука», 1966
3. Луи де Бройль. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. М., ИЛ., 1948.

Поступила в редакцию
19. 12 1966 г.

Кафедра
теоретической физики