Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1968

В. П. ДОЛГАЧЕВ

О ДВИЖЕНИИ ДАЛЕКИХ ИСЗ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ И ЛУНЫ

Содержатся выражения возмущений первого порядка элементов орбит ИСЗ от сжатия Земли и второй гармоники притяжения Луны, которая считается материальной точкой, движущейся по круговой орбите. Выведенные формулы пригодны и для анализа возмущений от Солнца.

В предыдущей работе [1] были получены выражения для вековых возмущений далеких ИСЗ в гравитационном поле Земли и Луны, причем учитывались возмущения от второй гармоники земного потенциала и второй и третьей гармоник притяжения Луны, которая считается материальной точкой, движущейся по эллиптической орбите.

Оставаясь в рамках классической схемы, предложенной Лагранжем, были получены возмущения в элементах Лагранжа, при этом, естественно, полученные формулы для вековых возмущений справедливы для малых эксцентриситетов и наклонностей.

В данной работе рассматриваются возмущения от второй гармоники потенциала Земли и второй гармоники притяжения Луны, которая считается материальной точкой, движущейся по круговой орбите.

Путем перехода к независимой переменной невозмущенной истинной аномалии спутника получены вековые и долгопериодические возмущения первого порядка в движении ИСЗ.

Выведенные формулы пригодны для орбит с произвольным наклоном.

§ 1. Постановка задачи

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Земли так, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью орбиты возмущающего тела (Луны), а ось Ox была направлена в перигей орбиты Луны.

Тогда, разлагая возмущающую функцию задачи в ряд по полиномам Лежандра и ограничиваясь вторыми гармониками потенциала Земли и притяжения Луны, можно написать

$$R = \frac{\mu_L}{2}\frac{r^2}{r_L^3}(3\cos^2\psi - 1) + \frac{1}{3}\mu_E J\frac{a_0^2}{r^3}\Big\{1 - \frac{3}{2}[N_1^2 + N_2^2 + \cos 2v(\cos 2\omega(N_2^2 - N_1^2) + 2N_1N_2\sin 2\omega) + \sin 2v(\sin 2\omega(N_1^2 - N_2^2) + 2N_1N_2\cos 2\omega)]\Big\}, \qquad (1)$$

где

$$\mu_L = fm_L, \quad \mu_E = fm_E,$$

$$\cos\psi = \cos u\cos(\Omega - v_L) - \sin u\cos i\sin(\Omega - v_L),$$

$$N_1 = \sin i\cos\varepsilon + \cos i\sin\varepsilon\cos\Omega,$$

$$N_2 = \sin\varepsilon\sin\Omega, \quad u = v + \omega,$$

f — постоянная тяготения, m_E и m_L — массы Земли и Луны, r и r_L — геоцентрические радиусы спутника и Луны, v и v_L — истинные аномалии спутника и Луны, J — параметр сжатия, a_0 — экваториальный радиус Земли, ω — долгота перигея, i — наклонение, Ω — долгота узла орбиты спутника, ε — угол между плоскостью экватора Земли и плоскостью орбиты Луны.

Обозначим первый член выражения (1), имеющий множитель μ_L, через R_L, а член, содержащий множитель μ_E, через R_E. Если вместо $\cos\psi$ в R_L внести его выражение через кеплеровские элементы спутника и Луны, то R_L примет следующий вид:

$$R_L = \frac{1}{8}n_1^2r^2(3\cos^2 i - 1) + \frac{3}{8}n_1^2r^2\Big\{\sin^2 i\,[\cos 2(\Omega - v_L) + \cos 2(v + \omega)] + 2\sin^4\frac{i}{2}\cos 2(v + v_L + \omega - \Omega) + 2\cos^4\frac{i}{2}\cos 2(v - v_L + \omega + \Omega)\Big\}, \qquad (2)$$

где

$$n_1^2 = \frac{\mu_L}{r_L^3}.$$

Если принять невозмущенную истинную аномалию спутника за новую независимую переменную, то уравнение Лагранжа для оскулирующих эллиптических элементов, пригодные для вычисления возмущений первого порядка, примут вид [2]

$$\frac{da}{dv} = \frac{2}{n^2a}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial M_0};$$

$$\frac{de}{dv} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2a^2e}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{1}{n^2a^2e}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial\omega},$$

$$\frac{d\omega}{\partial v} = -\frac{\operatorname{ctg} i}{n^2a^2(1-e^2)}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{1}{n^2a^2e}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$\frac{di}{dv} = \frac{\operatorname{ctg} i}{n^2a^2(1-e^2)}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial\omega} - \frac{1}{n^2a^2(1-e^2)\sin i}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial\Omega},$$

$$\frac{d\Omega}{dv}=\frac{1}{n^2a^2(1-e^2)\sin i}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{dM_0}{dv}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2a^2e}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{n^2a\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2\frac{\partial R}{\partial a}. \qquad (3)$$

Здесь a — большая полуось, e — эксцентриситет, n — среднее движение и M_0 — средняя аномалия спутника в эпоху.

Время t связано с невозмущенной истинной аномалией следующим соотношением:

$$t-\tau=\frac{(1-e^2)^{3/2}}{n}\int\limits_0^v\frac{dv}{(1+e\cos v)^2},$$

в котором τ — момент прохождения спутника через перигей.

§ 2. Зависимость между истинными аномалиями спутника и Луны

Для вычисления средних аномалий ИСЗ и Луны на данный момент времени t служат известные формулы

$$M=M_0+nt, \quad M_L=M_L^0+n_Lt, \qquad (4)$$

где n и n_L — среднее аномалистическое движение спутника и Луны, а M_0 и $M_L^{(0)}$ — средние аномалии в начальную эпоху.

Обозначим отношение средних движений n и n_L через m и $m=\frac{n_L}{n}$. Исключая t из уравнений (4), получим $M_L=M_1+mM$, где положено $M_1=M_L^{(0)}-mM_0$.

Воспользовавшись уравнением центра и пренебрегая эксцентриситетом орбиты Луны, получим

$$v_L=M_1+m\left(v-2e\sin v+\frac{3}{4}e^2\sin 2v+\ldots\right)=M_1+mv+mef(v),$$

где $f(v)$ — ограниченная периодическая функция v.

Пренебрегая в выражениях $\cos 2(v\pm v_L+\omega-\Omega)$ малыми порядка em, получим окончательное выражение для возмущающей функции R_L:

$$R_L=\frac{1}{8}n_1^2r^2(3\cos^2 i-1)+\frac{3}{8}n_1^2r^2\Big\{\sin^2 i\,[\cos 2(\Omega-M_1-mv)+$$

$$+\cos 2(v+\omega)]+2\sin^4\frac{i}{2}\cos 2(v+mv+M_1+\omega-\Omega)+$$

$$+2\cos^4\frac{i}{2}\cos 2(v-mv-M_1+\omega+\Omega)\Big\}. \qquad (5)$$

§ 3. Формулы для возмущений

Вычислив соответствующие производные от R_L и R_E по элементам и подставив их выражения в уравнения (3), получим систему дифференциальных уравнений движения спутника, в которых правые части являются функциями истинной аномалии v.

Воспользовавшись разложением в ряд Фурье выражений вида $\left(\frac{r}{p}\right)^n$ по кратным истинной аномалии v, будем иметь

$$\left(\frac{r}{p}\right)^n = M_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} 2M_n^{(k)}(e) \cos kv,$$

где

$$M_n^{(k)}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^{-n} \cos kv dv.$$

Интегрирование системы (3) в предположении, что в правых частях элементы орбиты заменены постоянными величинами, дает возмущения первого порядка

$$a = a_0 + \delta_1 a, \quad e = e_0 + \delta_1 e,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_0 = M_0^* + \delta_1 M_0,$$

где $a_0, e_0, \ldots, M_0^*$ — постоянные интегрирования; $\delta_1 a$, $\delta_1 e$, ..., $\delta_1 M_0$ — возмущения соответствующих элементов.

При интегрировании системы (3) сохранены вековые возмущения, а также периодические возмущения, общий период которых по v равен $\frac{2\pi}{m}$.

Такие периодические возмущения будут соответствовать тем членам в R_L, для которых $k=n$ и в дальнейшем будут называться долгопериодическими возмущениями. Окончательные выражения для вековых и долгопериодических возмущений от Луны для всех шести элементов имеют вид

$$\delta_1 a_L = 0,$$

$$\delta_1 e_L = \frac{3}{4}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \left(\frac{p}{a}\right)^4 \frac{1}{e} \delta_1 B_L,$$

$$\delta_1 \omega_L = -\cos i \cdot \delta_1 \Omega_L + \delta_1 C_L,$$

$$\delta_1 i_L = \frac{3}{4}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \left(\frac{p}{a}\right)^3 \left\{-\operatorname{ctg} i \delta_1 B_L + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \left[M_4^{(0)} \sin i \cos 2(\Omega - \right.\right.$$

$$- M_1 - mv) + M_4^{(2)} \sin^2 \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos 2(mv + \omega - \Omega + M_1) +$$

$$\left.\left. + M_4^{(2)} \cos^2 \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{i}{2} \cos 2(mv - \omega - \Omega + M_1) \right]\right\},$$

$$\delta_1 \Omega_L = \frac{3}{8}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \left(\frac{p}{a}\right)^3 \frac{1}{m} \left\{\cos i \left[-2mM_4^{(0)} v + 2mM_4^{(2)} \cdot v \cos 2\omega + \right.\right.$$

$$\left. + M_4^{(0)} \sin 2(mv - \Omega + M_1) \right] + M_4^{(2)} \left[\sin^2 \frac{i}{2} \sin 2(mv + \omega - \Omega + M_1) - \right.$$

$$\left.\left. - \cos^2 \frac{i}{2} \sin 2(mv - \omega - \Omega + M_1) \right]\right\},$$

$$\delta_1 M_{0L} = -\sqrt{1 - e^2}\, \delta_1 C_L - \frac{1}{2}\left(\frac{n_1 p^2}{na^2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \left(M_4^{(0)} [3 \cos^2 i - 1] v + \right.$$

$$+3\left\{\sin^2 i\left[(M_4^{(2)}\cos 2\omega)\,v+\frac{1}{m}M_4^{(0)}\sin 2(mv+M_1-\Omega)\right]+\right.$$

$$+\frac{M_4^{(2)}}{m}\left[\sin^4\frac{i}{2}\sin 2(mv+\omega-\Omega+M_1)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\cos^4\frac{i}{2}\sin 2(mv-\omega-\Omega+M_1)\right]\right\}\right).$$

Здесь

$$\delta_1 B_L=M_4^{(2)}\left[v\sin^2 i\sin 2\omega-\frac{1}{m}\sin^4\frac{i}{2}\cos 2(mv+\omega-\Omega+M_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\cos^4\frac{i}{2}\cos 2(mv-\omega-\Omega+M_1)\right],$$

$$\delta_1 C_L=\frac{3}{8}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{p}{a}\right)^3\frac{1}{e}\left\{2M_3^{(1)}\left(\frac{1}{3}-\cos^2 i\right)v-\right.$$

$$-(2M_3^{(1)}+M_4^{(1)}-M_4^{(3)})\left[v\sin^2 i\cos 2\omega+\frac{1}{m}\sin^4\frac{i}{2}\sin 2(mv+\omega-\Omega+M_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\cos^4\frac{i}{2}\sin 2(mv-\omega-\Omega+M_1)\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{m}M_3^{(1)}\sin 2(mv-\Omega+M_1)\right\}.$$

В выражения возмущений элементов входят следующие коэффициенты ряда Фурье: $M_3^{(1)}$, $M_4^{(0)}$, $M_4^{(1)}$, $M_4^{(2)}$.

Воспользовавшись реккурентными формулами для коэффициентов $M_n^{(k)}$, полученными Аксеновым Е. П. [3], находим

$$M_3^{(1)}=-\frac{3}{2}e(1-e^2)^{-5/2},$$

$$M_4^{(0)}=\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)(1-e^2)^{-7/2},$$

$$M_4^{(1)}=-\frac{1}{2}e(e^2+4)(1-e^2)^{-7/2},$$

$$M_4^{(2)}=\frac{5}{2}e^2(1-e^2)^{-7/2}.$$

Что касается выражений для возмущений элементов орбиты ИСЗ от второй гармоники потенциала Земли, то можно получить замкнутые выражения как относительно эксцентриситета, так и относительно наклона орбиты, на что впервые указал Козаи (*Kozai Y*) [4].

Приводимые ниже выражения для возмущений элементов отличаются от формул Козаи только тем, что элементы орбиты спутника отнесены к плоскости орбиты Луны, тогда как у Козаи приняты экваториальные элементы. Полученные нами выражения приведены здесь для единообразия и возможности проведения анализа совместного влияния Луны и сжатия Земли на движение далекого ИСЗ.

$$\delta_1 a_E=J\left(\frac{a_0}{1-e^2}\right)^2\frac{1}{p}\,\delta_1 A_E,$$

$$\delta_1 e_E = \frac{1}{2ep} J a_0^2 \left(\frac{1}{p} \delta_1 A_E - \frac{1}{a} \delta_1 B_E \right),$$

$$\delta_1 \omega_E = -\cos i \, \delta_1 \Omega_E + \delta_1 C_E,$$

$$\delta_1 i_E = \frac{1}{2} J \left(\frac{a_0}{p} \right)^2 \frac{1}{\sin i} \Big[\cos i \delta_1 B_E + \Big(\sin^2 i \sin^2 \varepsilon \sin 2\Omega -$$

$$- \frac{1}{2} \sin 2i \sin 2\varepsilon \sin \Omega \Big) (v + e \sin v) + \frac{1}{2} (N_5 \cos 2\omega +$$

$$+ N_6 \sin 2\omega) \left(e \sin v + \sin 2v + \frac{e}{3} \sin 3v \right) -$$

$$- \frac{1}{2} (N_6 \cos 2\omega - N_5 \sin 2\omega) \left(e \cos v + \cos 2v + \frac{e}{3} \cos 3v \right) \Big],$$

$$\delta_1 \Omega_E = -\frac{1}{4} J \left(\frac{a_0}{p} \right)^2 \frac{1}{\sin i} \Big[2N_3 (v + e \sin v) + (N_4 \sin 2\omega -$$

$$- N_3 \cos 2\omega) \left(e \sin v + \sin 2v + \frac{e}{3} \sin 3v \right) -$$

$$- (N_4 \cos 2\omega + N_3 \sin 2\omega) \left(e \cos v + \cos 2v + \frac{e}{3} \cos 3v \right) \Big],$$

$$\delta_1 M_0 = -\sqrt{1 - e^2} \, \delta_1 C_E + 3J \frac{a_0^2}{ap\sqrt{1 - e^2}} \Big\{ \left(\frac{2}{3} - N_1^2 - N_2^2 \right) (v + e \sin v) -$$

$$- \frac{1}{2} \left[(N_2^2 - N_1^2) \cos 2\omega + 2N_1 N_2 \sin 2\omega \right] \left(e \sin v + \sin 2v + \frac{e}{3} \sin 3v \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(N_1^2 - N_2^2) \sin 2\omega + 2N_1 N_2 \cos 2\omega \right] \left(e \cos v + \cos 2v + \frac{e}{3} \cos 3v \right) \Big\},$$

де

$$\delta_1 A_E = 2e \left[1 - \frac{3}{2} (N_1^2 + N_2^2) \right] \left[\left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \cos v + \frac{e}{2} \cos 2v + \frac{e^2}{12} \cos 3v \right] -$$

$$- \left[(N_2^2 - N_1^2) \cos 2\omega + 2N_1 N_2 \sin 2\omega \right] \Big[\frac{e}{2} (3 + e^2) \cos v +$$

$$+ \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \cos 2v + \frac{3}{2} e \left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \cos 3v + \frac{3}{4} e^2 \cos 4v + \frac{e^3}{8} \cos 5v \Big] -$$

$$- \left[(N_1^2 - N_2^2) \sin 2\omega + 2N_1 N_2 \cos 2\omega \right] \Big[\frac{e}{2} (3 + e^2) \sin v +$$

$$+ \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \sin 2v + \frac{3}{2} e \left(1 + \frac{e^2}{4} \right) \sin 3v + \frac{3}{4} e^2 \sin 4v + \frac{e^3}{8} \sin 5v \Big],$$

$$\delta_1 B_E = -\left[(N_1^2 - N_2^2) \sin 2\omega + 2N_1 N_2 \cos 2\omega \right] \left(e \sin v + \sin 2v + \frac{e}{3} \sin 3v \right) +$$

$$+ \left[(N_1^2 - N_2^2) \cos 2\omega - 2N_1 N_2 \sin 2\omega \right] \left(e \cos v + \cos 2v + \frac{e}{3} \cos 3v \right),$$

$$\delta_1 C_E = J \left(\frac{a_0}{p} \right)^2 \Big\{ \left[1 - \frac{3}{2} (N_1^2 + N_2^2) \right] \Big[ev + \left(1 + \frac{3}{4} e^2 \right) \sin v +$$

$$
+\frac{e}{2}\sin 2v+\frac{e^2}{12}\sin 3v\Big]-\frac{1}{4}\left[(N_2^2-N_1^2)\cos 2\omega+2N_1N_2\sin 2\omega\right]\times
$$

$$
\times\left[(2e^2-1)\sin v+3e\sin 2v+\frac{1}{3}\left(7+\frac{11}{4}e^2\right)\sin 3v+\frac{3}{2}e\sin 4v+\right.
$$

$$
\left.+\frac{e^2}{4}\sin 5v\right]+\frac{1}{4}\left[(N_1^2-N_2^2)\sin 2\omega+2N_1N_2\cos 2\omega\right]\times
$$

$$
\times\left[\left(\frac{3}{2}e^2-1\right)\cos v+3e\cos 2v+\frac{1}{3}\left(7+\frac{11}{4}e^2\right)\cos 3v+\frac{3}{2}e\cos 4v+\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{e^2}{4}\cos 5v\right]\right\}.
$$

$$
N_3=\sin 2i\cos^2\varepsilon+\cos 2i\sin 2\varepsilon\cos\Omega-\sin 2i\sin^2\varepsilon\cos^2\Omega,
$$

$$
N_4=\cos i\sin\Omega\sin 2\varepsilon-\sin i\sin^2\varepsilon\sin 2\Omega,
$$

$$
N_5=\sin^2\varepsilon\sin 2\Omega\,(1+\cos^2 i)+\frac{1}{2}\sin 2i\sin 2\varepsilon\sin\Omega,
$$

$$
N_6=\sin 2\varepsilon\sin i\cos\Omega+2\sin^2\varepsilon\cos 2\Omega\cos i.
$$

Вышеизложенным методом можно получить выражения для долгопериодических возмущений с учетом e_L и em. Такие формулы получены, однако объем статьи не позволяет привести эти выражения.

В заключение необходимо отметить, что, приняв плоскость эклиптики за основную плоскость отсчета, можно по аналогии написать выражения для вековых и долгопериодических возмущений от Солнца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгачев В. П. Сообщения ГАИШ, № 154, 1967.
2. Чеботарев Г. А. Аналитические и качественные методы небесной механики. М., «Наука», 1965.
3. Аксенов Е. П. Труды ГАИШ, т. 36, 1967.
4. Kozai Y. Astron. J., 64, 9, 1959.

Поступила в редакцию
28. 3 1967 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии