ченная зависимость представлена на рис. 1 и 2 кривая *1*. Если подставить полученные значения α и β^2 в формулы для моментов (4), (5), (6), то можно получить значения S_2; S_4/S_2^2 и S_6/S_2^3 для выбранной четырехспиновой системы.

Зависимость S_6/S_2^3 от S_2, рассчитанная по этим формулам, приведена на рис. 3 кривая *2*, результаты непосредственных квантовомеханических расчетов, проведенных по (3), приведены на рис. 3 кривая *1*. Кроме того, если значения моментов линий, рассчитанных по (3) из спектра подставить в (4) и (5), то α и β^2 можно определить как функцию S_2 и S_4

$$(\alpha h_0)^4 = \frac{3S_2^3 - S_4}{2},$$

$$\beta^2 = S_2 - \sqrt{\frac{3S_2^2 - S_4}{2}}.$$

Эти величины приведены на рис. 1 и 2 кривые *2*. Подставляя эти значения в (6), можно найти зависимость отношения S_6/S_2^3 от S_2 и S_4

$$S_6/S_2^3 = \left(1 - \frac{S_4}{S_2^2}\right)\left[12\sqrt{6}\left(1 - \frac{S_4}{S_2^2}\right)^{1/2} - 45\right] + 15.$$

Результаты этих расчетов приведены на рис. 3 кривая *3*. Из рисунков видно, что статистическая теория для взаимодействующих двухспиновых систем в монокристалле уже при учете взаимодействия всего двух групп дает хорошее совпадение с непосредственным квантовомеханическим расчетом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kubo R., Tomita K. J. Phys. Soc. Japan, **9**, 888, 1954.
2. Bersohn R., Gutowsky H. S. J. Chem. Phys., **22**, 651, 1954.
3. Van Vleck J. H. Phys. Rev., 1168, 1948.

Поступила в редакцию
16. 4 1967 г.

Кафедра
молекулярной физики

УДК 517.9 : 535.4

В. В. КРАВЦОВ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

При получении отражения волн от препятствий большой интерес представляет угловое распределение отраженной энергии. Угловое распределение отраженной энергии характеризуется диаграммой направленности, которая иногда называется индикатриссой излучения или сечением рассеяния. Обычная методика вычисления диаграммы направленности следующая. Сначала определяется «наведенный» на препятствии «ток», а затем по нему находится диаграмма направленности. Но для нахождения «наведенного тока» надо каким-либо образом решить соответствующую краевую задачу теории дифракции. Одним из методов решения задачи дифракции является метод разделения переменных. Он применяется в том случае, когда поверхность тела, на котором происходит дифракция, представляет собой координатную поверхность в одной из систем координат, где переменные в уравнении Гельмгольца разделяются. Решение задачи в этом случае представляется в виде ряда по соответствующим специальным функциям. При вычислении рядов кроме обычных трудностей, возникающих при высокочастотной дифракции, появляются дополнительные трудности, связанные с тем, что многие из встречающихся специальных функций недостаточно хорошо изучены и табулированы.

В связи с этим возникает мысль обойти этот достаточно трудный промежуточный этап (решение краевой задачи) и получить уравнение сразу для диаграммы направленности. В настоящей работе выводится интегральное уравнение первого рода для диаграммы направленности для случая, когда дифракция происходит на теле, поверхность которого является координатной поверхностью той системы координат, где переменные в уравнении Гельмгольца разделяются.

Пусть волна, созданная источником, расположенным в точке M_0, падает на тело, ограниченное поверхностью S. Для определения полного поля вне S надо решить следующую внешнюю краевую задачу:

$$\begin{gathered} \Delta u + k^2 u = -4\pi\delta(M, M_0) \text{ вне } S, \\ u|_S = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = 0\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty. \end{gathered} \tag{1}$$

Как уже указывалось ранее, будем считать, что поверхность S является координатной поверхностью в системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3), в которой переменные в уравнении Гельмгольца разделяются. Пусть уравнение поверхности S имеет вид: $\xi_1=\mathrm{const}$. Введем следующие обозначения. Решение уравнения Гельмгольца, полученное методом разделения переменных, будем записывать в виде.

$$u_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = R_n^{(i,e)}(\xi_1)\,\Phi_n(\xi_2, \xi_3),$$

где индекс i соответствует внутренней задаче, а индекс e — внешней. (Иными словами, функции $R_n^{(i)}(\xi_1)$ ограничены внутри S, а функции $R_n^{(e)}(\xi_1)$ — ограничены вне S и удовлетворяют условию излучения на бесконечности.) Функции $\Phi_n(\xi_2, \xi_3)$ будем считать ортонормированными:

$$\iint \Phi_n(\xi_2, \xi_3)\,\Phi_{n'}^{*}(\xi_2, \xi_3)\,\rho(\xi_2, \xi_3)\,d\xi_2 d\xi_3 = \delta_{n,n'},$$

где $\delta_{n,n'}$ — символ Кронекера, $\rho(\xi_2, \xi_3)$ — вес, интеграл берется по области изменения ξ_2 и ξ_3. В дальнейшем нам потребуются разложения сферической и плоской волны. Эти разложения будем записывать в виде

$$\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} = \sum_n a_n R_n^{(i)}(\xi_1')\,R_n^{(e)}(\xi_1)\,\Phi_n(\xi_2, \xi_3)\,\Phi_n^{*}(\xi_2', \xi_3'),\ (\xi_1' < \xi_1), \tag{2}$$

где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — координаты точки M, (ξ_1', ξ_2', ξ_3') — координаты точки P, R_{MP} — расстояние между точками M и P, коэффициенты a_n от координат точек M и P не зависят; если $\xi_1' > \xi_1$, то индексы i и e надо поменять местами;

$$e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \sum_n b_n R_n^{(i)}(\xi_1)\,\Phi_n(\xi_2, \xi_3)\,\Phi_n^{*}(\xi_2', \xi_3'), \tag{3}$$

где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) связаны с вектором $\vec{r}$, (ξ_2', ξ_3') — с вектором $\vec{k}$.

Эти разложения нам будут нужны при выводе интегрального уравнения для диаграммы направленности.

Теперь получим выражение для диаграммы направленности. Решение краевой задачи (1) можно представить в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}(P)\,\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}}\,dS + \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \tag{4}$$

точка M лежит вне поверхности S, а нормальная производная решения

$$\mu(P) = \frac{\partial u}{\partial n}(P)|_S$$

определяется из интегрального уравнения первого рода

$$\oint_S \mu(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} dS = -4\pi \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{R_{MM_0}}, \tag{5}$$

где точка M лежит внутри поверхности S.

Чтобы получить диаграмму направленности, рассмотрим поле $u(M)$ в дальней зоне. Пусть (r, ϑ, φ), $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, $(r', \vartheta', \varphi')$ — сферические координаты точек M, M_0 и P соответственно. Тогда из (4) получаем при $r \to \infty$

$$u(M) \underset{r\to\infty}{\approx} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \frac{1}{4\pi} \oint_S \mu(P)\, e^{-ikr'\cos\beta} dS + e^{-ikr_0\cos\beta_0} \right\} = \frac{e^{ikr}}{r} D(\vartheta, \varphi),$$

где

$$\cos\beta = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$$\cos\beta_0 = \cos\vartheta_0 \cos\vartheta' + \sin\vartheta_0 \sin\vartheta' \cos(\varphi_0 - \varphi').$$

Функция $D(\vartheta, \varphi)$ называется диаграммой направленности полного поля по полю. Диаграмма направленности полного поля по энергии определяется следующим образом:

$$D_{\text{энерг}}(\vartheta, \varphi) = |D(\vartheta, \varphi)|^2.$$

Введем в рассмотрение еще диаграммы по полю и по энергии для отраженного поля:

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mu(P)\, e^{-ikr'\cos\beta} dS,$$

$$\sigma_{\text{энерг}}(\vartheta, \varphi) = |\sigma(\vartheta, \varphi)|^2.$$

Диаграммы для полного и отраженного поля связаны между собой:

$$D(\vartheta, \varphi) = \sigma(\vartheta, \varphi) + e^{-ikr_0\cos\beta_0}. \tag{6}$$

Перейдем к выводу интегрального уравнения для диаграммы направленности. Уравнение (5) может быть решено в виде ряда:

$$\mu(P) = -\frac{4\pi\rho(\xi_2, \xi_3)}{I(\xi_2, \xi_3)} \sum_n \frac{R_n^{(e)}(\xi_1^0)}{R_n^{(e)}(\xi_1)} \Phi_n(\xi_2, \xi_3)\, \Phi_n(\xi_2^0, \xi_3^0),$$

где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — координаты точки P, $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ — координаты точки M_0, $I(\xi_2, \xi_3)\, d\xi_2 d\xi_3$ — элемент поверхности S. Это решение также можно легко получить, решая задачу (1) методом разделения переменных. Теперь найдем диаграмму отраженного поля $\sigma(\vartheta, \varphi)$:

$$\sigma(\vartheta, \varphi) = -\sum_n b_n \frac{R_n^{(e)}(\xi_1^0)}{R_n^{(e)}(\xi_1)} R_n^{(i)}(\xi_1)\, \Phi_n(\xi_2^0, \xi_3^0)\, \Phi_n(\xi_2', \xi_3') = \sigma(\xi_2', \xi_3'). \tag{7}$$

Получено обычное выражение для диаграммы в виде бесконечного ряда, вычисление которого и встречается с указанными ранее трудностями. Мы это выражение используем как промежуточный этап.

Выражение (7) умножим на

$$\frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}},$$

где точка $P(\xi_1, \xi_2', \xi_3')$ лежит на поверхности S, а точка $M(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ лежит внутри S, и проинтегрируем по поверхности S с весом $\rho(\xi_2', \xi_3')$:

$$\iint \frac{e^{ikR_{MP}}}{R_{MP}} \sigma(\xi_2', \xi_3') \rho(\xi_2', \xi_3') d\xi_2' d\xi_3' = -\sum_n a_n b_n R_n^{(e)}(\xi_1^0) R_n^{(i)}(\xi_1) R_n^{(i)}(\bar{\xi}_1) \times$$
$$\times \Phi_n(\xi_2^0, \xi_3^0) \Phi_n^* (\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3). \qquad (8)$$

Ряд, стоящий в правой части (8), можно преобразовать к интегралу:

$$\sum_n a_n b_n R_n^{(e)}(\xi_1^0) R_n^{(i)}(\xi_1) R_n^{(i)}(\bar{\xi}_1) \Phi_n(\xi_2^0, \xi_3^0) \Phi_n^*(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) =$$
$$= \iint e^{-ikr'\cos\beta'} \frac{e^{ikR_{M_0Q}}}{R_{M_0Q}} \rho(\xi_2', \xi_3') d\xi_2' d\xi_3',$$

где $(r', \vartheta', \varphi')$ — сферические координаты точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3), лежащей на поверхности S, $(\bar{r}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi})$ — сферические координаты точки $Q(\bar{\xi}_1, \xi_2', \xi_3')$, лежащей внутри S, $\cos\beta' = \cos\bar{\vartheta}\cos\vartheta' + \sin\bar{\vartheta}\sin\vartheta'\cos(\varphi' - \bar{\varphi})$. Теперь интегральное уравнение (8) можно записать в виде

$$\iint \frac{e^{ikR_{Mp}}}{R_{MP}} \sigma(\xi_2', \xi_3') \rho(\xi_2', \xi_3') d\xi_2' d\xi_3' = \iint e^{-ikr'\cos\beta'} \frac{e^{ikR_{M_0Q}}}{R_{M_0Q}} \rho(\xi_2', \xi_3') d\xi_2' d\xi_3'. \qquad (9)$$

Итак, для диаграммы направленности отраженного поля $\sigma(\xi_2', \xi_3')$ получено интегральное уравнение первого рода. Аналогичное уравнение можно получить для диаграммы направленности для полного поля. Если падающая волна не является сферической, то изменится правая часть этого уравнения (она станет более сложной). Уравнение (9) можно решать численно, не связывая себя со специальными функциями, соответствующими данной системе координат.

Поступила в редакцию
15. 4 1967 г.

Кафедра
математики

УДК 535.241.13

Е. Р. МУСТЕЛЬ, В. Н. ПАРЫГИН, В. С. СОЛОМАТИН

МОДУЛЯЦИЯ ИНФРАКРАСНОГО СВЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИСТАЛЛА $LiNbO_3$

Одним из наиболее перспективных кристаллов для модуляции света является $LiNbO_3$ [1, 4]. До настоящего времени были измерены его электрооптические константы на частотах 50—86 *мгц* в видимом диапазоне [1]. В данном сообщении приводятся частотные характеристики модулятора инфракрасного диапазона на этом кристалле от 0 до 300 *мгц*.

Амплитудная модуляция с помощью кристалла $LiNbO_3$ возможна в двух случаях.

Электрическое поле перпендикулярно оптической оси, т. е. $E_z = 0$. Если свет распространяется вдоль z, то фазовая задержка, связанная с электрическим полем, равна

$$\Gamma_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 E l = \frac{2\pi}{\lambda} r_{22} n_0^3 \frac{l}{d} V. \qquad (1)$$

Поляризация падающего на кристалл света должна составлять с осью x угол α, определяемый из условия $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{E_x}{E_y}$.