Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1968

УДК 530.12+531.51

К. П. СТАНЮКОВИЧ

О КВАДРУПОЛЬНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Рассматривается флуктуация метрики импульсов и моментов у элементарных частиц.

В квантовой теории поля невзаимодействующие элементарные частицы считаются точечными. При взаимодействиях частица как бы размазывается, и тогда можно ей приписывать определенный «радиус» взаимодействий. Очевидно от всех видов взаимодействий, кроме гравитационного, с внешним полем можно «заэкранироваться». Поэтому частицы будут размазаны в гравитационном поле и размеры их зависят от «постоянной» тяготения и постоянной Планка [1, 2 и 3]. Они запишутся

$$L = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \sim 10^{-33} \text{ см}.$$

Аналогичный результат можно получить из формулы Д. И. Блохинцева [4] для флуктуации интервала, которую мы запишем в виде

$$\Delta s^2 = \frac{r_g^2}{r_0^2}\,\frac{l^3 a}{r_0^4}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^2 = \frac{r_g^3}{r_0^3}\,\frac{l^3 a}{r_0^4}\,c\tau\, ct, \quad \text{где } r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad a \text{ — кривизна.}$$

Поскольку

$$c\tau = a,\ ct = a_0, \quad \text{то} \quad \Delta s^2 = \frac{r_g^3}{r_0^3}\,\frac{l^3 a^2}{r_0^3} \simeq 10^{-40} r_0^2 \left(\frac{l}{r_0}\right)^3.$$

Откуда

$$\frac{\Delta s}{r_0} = 10^{-20}\left(\frac{l}{r_0}\right)^2 = 10^{-20}, \qquad \Delta s = r_0 \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}} = L = 10^{-33} = \bar{r}.$$

Здесь $l = r_0 = 10^{-13}$ *см* — размеры областей флуктуаций, $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\bar{r}}{r_0} = \frac{L}{r_0} = \sqrt{\frac{r_g}{r_0}}$ — относительные флуктуации плотности.

Поскольку δ_0 относительные флуктуации метрики или, попросту говоря, величины длины порядка $\frac{L}{r_0} = 10^{-20}$, что почти на двадцать порядков превышает величину $\frac{r_g}{r_0} = 10^{-40}$, то, исследуя основные свойства элементарных частиц с помощью уравнений квантовой механики и теории поля, можно пренебрегать кривизной пространства, происходящей за счет собственного шварцшильдовского поля, поскольку оно порядка $\frac{r_g}{r_0} = 10^{-40}$, а учитывать лишь гравитационные флуктуации метрик квазиэвклидового пространства.

При этом будут наблюдаться флуктуации импульса и момента количества движения. Их относительная величина будет также порядка $\frac{L}{r_0} = 10^{-20}$. В самом деле, средняя квадратичная флуктуация скорости частиц, происходящая за счет взаимодействия с гравитационным полем:

$$(\overline{V})^2 = \frac{3kT_g}{m}, \tag{1}$$

где $kT_g = E_g = \frac{\hbar c}{a}$ — энергия кванта гравитационного поля, T_g — температура гравитационного поля ($T_g \approx 10^{-26°}$). Из (1) имеем

$$\frac{(\overline{V})^2}{c^2} = \frac{3E_g}{E_p} \simeq 10^{-40},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{(\overline{V})^2}{c^2}} = \frac{\overline{V}^*}{c} \simeq 10^{-20}.$$

Аналогично для флуктуации момента частиц в гравитационном поле получим

$$(\overline{M})^2 = 2E_g I_p = \frac{3kT_g}{m} m^2 r^2 = 3E_g m r^2 = \hbar^2 \frac{3E_g}{E_p} = \hbar^2 \cdot 10^{-40},$$

$$\sqrt{(\overline{M})^2} = \overline{M}^* = \hbar \cdot 10^{-20}, \tag{2}$$

где $I_p = mr^2$ — момент инерции нуклона. Очевидно, все компоненты квадратичных флуктуаций координат, импульсов и моментов будут одинаковы.

Таким образом, напишем

$$x_\alpha \to \overline{x}_\alpha + \frac{n_\alpha}{3}\sqrt{3(\Delta \overline{x}_p)^2} = x_\alpha + \xi_\alpha,$$

где

$$\xi_\alpha = \frac{n_\alpha}{3}\sqrt{3(\Delta \overline{x}_p)^2}.$$

Операторы импульса и момента примут вид

$$\hat{p}_\alpha \to \hat{p}_\alpha + \frac{n_\alpha}{3}\sqrt{3(\Delta \overline{p}_p)^2} = \hat{p}_\alpha + \hat{\eta}_\alpha, \quad \text{где } \hat{\eta}_\alpha = \frac{n_\alpha}{3}\sqrt{3(\Delta \overline{p}_p)^2},$$

$$\hat{M}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \to (x + \xi_x)(\hat{p}_y + \hat{\eta}_y) - (y + \xi_y)(\hat{p}_x + \hat{\eta}_x)$$

(аналогично и другие проекции оператора момента).

Учитывая только члены первого порядка малости, получим

$$\hat{M}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x + \xi(\hat{p}_y + \hat{p}_x) + \hat{\eta}(x - y),$$

т. е. прибавление дополнительных флуктуаций момента к полному моменту частицы не изменяет траектории движения. Поскольку средняя квадратичная флуктуация какой-либо величины или оператора $\hat{f}$ есть $\overline{(\Delta \hat{f})^2} = \overline{\hat{f}^2} - (\overline{\hat{f}})^2$, то приближенно флуктуация момента определяется соотношением (с точностью до членов высших порядков малости)

$$(\Delta \hat{M}_z)^2 = \overline{[(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) + \xi(\hat{p}_y - \hat{p}_x) + (x-y)\hat{\eta}]^2} -$$

$$- [\overline{[x\hat{p}_y - y\hat{p}_x + \xi(\hat{p}_y - \hat{p}_x) + (x-y)\hat{\eta}]}]^2$$

или

$$(\Delta \hat{M}_z)^2 = \frac{\xi^2}{3}(\hat{p}_y - \hat{p}_x)^2 + \frac{\hat{\eta}^2}{3}(x-y)^2.$$

Собственное значение квадрата флуктуации момента будет $\frac{\xi^2}{3} l(l+1)$. (Очевидно $\overline{\xi(\hat{p}_y - \hat{p}_x)} = 0$, $\overline{(x-y)\hat{\eta}} = 0$, поскольку система находится в равновесии.)

Также очевидно, что

$$\Delta \overline{\hat{x}^2} = \Delta \overline{\hat{y}^2} = \Delta \overline{\hat{z}^2} = \frac{1}{3} \Delta \overline{\hat{x}_\alpha^2},$$

$$\Delta \overline{\hat{p}_x^2} = \Delta \overline{\hat{p}_y^2} = \Delta \overline{\hat{p}_z^2} = \frac{1}{3} \Delta \overline{\hat{p}_\alpha^2}.$$

Флуктуации момента, поскольку они выражаются через соответствующие значения оператора момента, будут коммутировать с гамильтонианом системы:

$$[\overline{\hat{M}_z^2};\ \hat{H}] = 0, \quad \left[\sqrt{\overline{\hat{M}_z^2}};\ \hat{H}\right] = 0.$$

Таким образом, прибавление дополнительного флуктуационного момента к полному моменту системы не меняет условий коммутации момента с гамильтонианом и не изменяет интегралы движения.

Изучение движения частиц со спином $s = 1/2$ во внешнем поле, основанное лишь на решении уравнения Дирака, вообще не является корректной задачей. Для этого надо решить совместно и квантованное уравнение поля. Однако для слабых полей, каким является гравитационное поле, классическое или квазиклассическое рассмотрение задачи вполне законно. Имеет смысл от представления Дирака, описывающего движения частиц со спином $s = 1/2$, перейти к так называемому представлению Фолди—Вотхойзена [5] и [6], где можно ввести оператор координаты частицы.

Среднее значение этого оператора равно

$$\langle \hat{x} \rangle = \hat{x} - \frac{\hbar c^2 [\hat{\sigma} \times \hat{p}]}{2E_0 [E_0 + mc^2]} = \hat{x} + \Delta \hat{x},$$

где $E_0 = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = E_p$, σ — матрицы Дирака (Паули), p — импульс. Причем берется четная часть оператора, поскольку при усреднении нечетная часть $\sim \frac{c^2p^2}{E_0^2}$ дает нуль. При отсутствии какого-либо внешнего поля и взаимодействия с ним $p=0$, $\langle\hat{x}\rangle=\hat{x}$, $\Delta\hat{x}=0$. В случае электромагнитного поля $p=mc$, $E_0\cong\sqrt{2}mc^2$, $\Delta\hat{x}\approx\hat{x}$. В случае гравитационного поля

$$p\cong mc\frac{L}{r_0};\quad E_0=mc^2,\quad \Delta\hat{x}=\mathrm{const}\,\hat{x}\frac{L}{4r_0},$$

$$\langle\hat{x}\rangle=\hat{x}\left(1+\mathrm{const}\frac{L}{4r_0}\right).$$

Таким образом $\left(\text{флуктуации координат порядка } \frac{L}{4}\right)$, относительная флуктуация порядка $\frac{L}{4r_0}\sim 10^{-20}$, что совпадает с результатами, полученными выше. В случае представления Дирака коммутируют с гамильтонианом суммы полного момента и спина, в случае представления Фольди-Вотхойзена коммутируют отдельно величины

$$\langle\hat{M}\rangle=[\langle\hat{x}\rangle\times\hat{p}]\quad \langle\hat{s}\rangle=\hat{s}-\frac{i\hat{\beta}\,c\,[\hat{\alpha}\times\hat{p}]}{E_0}.$$

Величина $\langle\hat{s}\rangle$ называется оператором среднего спина. Величину $\langle\hat{M}\rangle$ можно назвать оператором среднего момента. Здесь снова берется четная часть оператора. (Нечетная часть $\approx\frac{c^2p^2}{E^2}$ при усреднении дает нуль.) Таким образом, в представлении Ф.— В. сохраняется величина

$$\langle\hat{s}\rangle=\hat{s}\left[1+\mathrm{const}\sqrt{\frac{3E_g}{E_p}}\right]=\hat{s}\left(1+\mathrm{const}\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3r_0^2}}\right).$$

При этом действительно к полному моменту добавляется величина порядка $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3r_0^2}}\sim 10^{-20}$.

Оператор скорости:

$$\langle\hat{V}\rangle=\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[\hat{x};\ \mathscr{H}_{\text{Ф.—В.}}]=\hat{\beta}\frac{c^2p}{E_0}.$$

Гамильтониан в представлении Ф. — В. равен

$$\mathscr{H}_{\text{Ф.—В.}}=\hat{\beta}E_0=\hat{\beta}c\sqrt{p^2+m^2c^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\langle\hat{V}\rangle}{c}=\hat{\beta}\frac{cp}{E_0}=\hat{\beta}\frac{3E_g}{E_p}\quad\text{или}\quad\frac{V_{\text{Ф.—В.}}}{c}=\frac{3E_g}{E_0}\approx 10^{-40}.\tag{3}$$

Очевидно

$$\frac{V_{\text{Ф.—В.}}}{c}=\frac{V^{*2}}{c^2}\quad\text{или}\quad\frac{V^*}{c}=\sqrt{\frac{V_{\text{Ф.—В.}}V_{\text{Д}}}{c^2}},\tag{3'}$$

где $\frac{V_{\text{Д}}}{c}=\frac{d\hat{x}_{\text{Д}}}{c\,dt}=1$; $V_{\text{Д}}$ — скорость в представлении Дирака. Отсюда следует, что скорость в представлении Дирака соответствует всегда только электромагнитным размерам частицы, а в случае представления Ф.—В. скорость соответствует тому полю, в котором находится частица. Средняя квадратичная скорость как и размеры частицы в заданном поле соответствует среднему геометрическому из величин скоростей или размеров дрожаний, присущих данному и электромагнитному полям.

Поскольку в представлении Дирака для производной от четной части оператора координаты по времени можно также написать выражение

$$\langle\widehat{x}\rangle^{*}=\widehat{x}+\frac{i\hbar c\bar{\lambda}}{2E_0}-\frac{i\hbar c^2p}{2E_0^2}=\widehat{x}+\frac{ic}{\omega}\left(1-\frac{cp}{E_0}\right),$$

где

$$\bar{\lambda}=\frac{H_D}{\sqrt{H_D^2}}=\frac{c\widehat{\alpha}\widehat{p}+\widehat{\beta}mc^2}{c\sqrt{p^2+m^2c^2}},$$

то из него становится очевидным, что «дрожание» частицы происходит в любом поле (при любом импульсе) с частотой $\omega=\frac{2mc^2}{\hbar}$, что для нуклона дает $\omega=10^{23}$ *сек*$^{-1}$, т. е. с частотой сильных взаимодействий. В представлении Дирака траектория частицы осциллирует со спином $s={}^1/_2$, в представлении Ф.—В. — не осциллирует, но спин ($s\neq{}^1/_2$) «размазан», что приводит к наличию квантованного квадрупольного момента у этой частицы.

От рассматриваемой флуктуации метрики начального квазиевклидового пространства легко прийти к нефлуктуирующему риманову пространству.

В самом деле, метрику риманова пространства $-ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^\alpha$ можно написать в виде

$$-ds^2=-dx^{0 2}+g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta,$$

здесь $g_{\alpha\beta}$ могут зависеть от всех x^i. (Используем четыре координатных преобразования и примем $g_{\alpha 0}=0$ и $g_{00}=-1$; здесь x^α являются чисто пространственными координатами.)

Далее поскольку в невозмущенном евклидовом трехмерном пространстве флуктуации (размазывание частиц) изменяют координаты и расстояния, заставляют их флуктуировать, получим $x^\alpha=\bar{x}^\alpha+\xi^\alpha$, где $\bar{x}^\alpha$ — координаты невозмущенного евклидового пространства, ξ^α — флуктуации координат, x^α — координаты пространства с учетом флуктуаций.

Вычислим величины ξ^α. Поскольку на расстоянии от «центра» нуклона $r=r_0$ величина флуктуации $L_r=L$, то на расстоянии $r\gg r_0$ значение $L_r=L\sqrt{\frac{r_0}{r}}$.

Это выражение очевидно, поскольку

$$\frac{(\bar{V}_r)^2}{c^2}=\frac{(\bar{L}_r)^2}{r_0^2}=\frac{kT_r}{m_pc^2}=\frac{kT_0}{m_pc^2}\cdot\frac{r_0}{r},\quad \frac{T_r}{T_0}=\frac{r_0}{r};\quad \frac{(\bar{L}_r)^2}{(\bar{L})^2}=\frac{r_0}{r}.$$

Относительная величина флуктуаций, приходящаяся на размеры нуклона, будет $\frac{L_r}{r_0}$, а сама абсолютная величина флуктуаций, приходящаяся на расстояние r, будет $|\xi|=2L_r\,\frac{r}{r_0}=2L\sqrt{\frac{r}{r_0}}$, где среднее значение $\bar{\xi}=0$. Отсюда следует также:

$$(\bar{\xi})^2=4L^2\,\frac{r}{r_0}=4r_gr.$$

Теперь можно написать $\xi^\alpha=n^\alpha|\xi|$, где n^α — компоненты единичного вектора.

Далее, очевидно, что в синхронной системе отсчета

$$dx^\alpha = d\bar{x}^\alpha + d\xi^\alpha;\quad dx^\alpha dx^\beta = d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta + d\xi^\alpha d\xi^\beta +$$
$$+ 2d\bar{x}p^3 d\xi^\alpha + \ldots \text{ (с членом } d\xi^\alpha).$$

Так как

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\bar{x}^\gamma}\, d\bar{x}^\gamma \quad d\xi^\beta = \frac{\partial\xi^p}{\partial\bar{x}^\sigma}\, d\bar{x}^\sigma,$$

то

$$dx^\alpha dx^\beta = d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\bar{x}^\gamma}\cdot\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\bar{x}^\sigma}\, d\bar{x}^\gamma d\bar{x}^\sigma + \ldots = \Big(\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\sigma +$$
$$+ \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\bar{x}^\gamma}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\bar{x}^\sigma}\Big)\, d\bar{x}^\gamma d\bar{x}^\sigma + \ldots \tag{4}$$

Координаты $\bar{x}^\alpha$ относятся к евклидову пространству, а «смещения» ξ^α и координаты x^α к возмущенному (риманову) пространству.

Умножая (4) на $g_{\alpha\beta}$, получим

$$\left(29\,\alpha\sigma\,\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\bar{x}^\gamma} + g_{\gamma\sigma} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\bar{x}^\gamma}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial\bar{x}^\sigma}\right) d\bar{x}^\gamma d\bar{x}^\sigma = g_{\gamma\sigma}\, dx^\gamma dx^\sigma.$$

Откуда

$$g_{0\gamma\sigma} = \delta_{\gamma\sigma} = g_{\alpha\beta}\left[\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\sigma + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\sigma}\, 2\delta^\beta_\sigma\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\gamma}\right],$$

что определяет $g_{\alpha\beta}$ по величинам «смещений» или флуктуаций. Причем $g_{\alpha\beta}$ могут зависеть от всех x^i. Перейдя к обычной системе отсчета, в случае центральной симметрии $\xi^\alpha = n^\alpha|\xi|\,\gamma = 1, x^1 = r$

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\gamma} = n^\alpha\frac{\partial|\xi|}{\partial x^\gamma} = \delta^\alpha_\gamma\frac{d|\xi|}{dr} = \delta^\alpha_\gamma\frac{L}{\sqrt{rr_0}} = \delta^\alpha_\gamma\sqrt{\frac{r_g}{r}},$$

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{\gamma\sigma}}{\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\sigma}\,\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}},\quad g_{11} = \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}},\quad g_{12} = g_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\beta = 2,\ 3.$$

Поскольку меняется пространственная метрика, то изменится и временная, если время относить к выбранному центру.

В рассматриваемом случае, поскольку $\frac{d\bar{r}}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$, то $\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{r}}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$, так как имеет место инвариант $dr\,dt = d\bar{r}\,d\bar{t} = \text{const}$.

Таким образом, $d\bar{t}^2 = dt^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)$ и метрика примет шварцшильдовский вид

$$-ds^2 = -c^2dt^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right) + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

В самом общем случае многих частиц метрику можно найти из аналогичных вычислений, используя закон статистического усреднения для многих частиц. Например, для сферического образования из N частиц, поскольку

$$L_{\text{общ}} = \frac{LN}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}\,L; \quad r_{g\text{общ}} = r_g \frac{L^2_{\text{общ}}}{L^2} = r_g N = \frac{2GM}{c^2},$$

что снова дает правильную метрику. В случае однородной изотропной вселенной Де Ситтера (или Эйнштейна) мы опять $\left(\text{поскольку } \frac{r^2}{a^2} = \frac{r_{\text{общ}}}{r}\right)$ придем к точной метрике и т. д.

Как было показано впервые А. Эйнштейном, ускоренно движущиеся тела или тела, обладающие квадрупольным моментом (а ускоренно движущиеся тела всегда имеют квадрупольные моменты), излучают гравитационные волны [7] и [8]. Мощность излучения при этом определяется выражением

$$-\dot{E}_g = \frac{G\dddot{D}^2_{\alpha\beta}}{45c^5}, \tag{5}$$

где G — гравитационная постоянная, $D^\beta_\alpha = \int \rho\, dv\,(3x_\alpha x^\beta - \delta^\beta_\alpha x_\gamma x^\gamma)$ тензор квадрупольного момента тела или система тел, ρ — плотность.

При этом рассматриваются лишь макроскопические тела и принято считать, что для микроскопических тел, например для атомов или элементарных частиц, соотношение (5) непосредственно не применимо, поскольку в него не входит постоянная Планка и оно не учитывает квантовых эффектов.

Покажем, что несколько модифицированное соотношение (5) может быть применимо и к квантовым системам.

Перейдем непосредственно к вычислению квадрупольного момента элементарных частиц. Величина проквантованного тензора электрического квадрупольного момента имеет вид

$$\widehat{Q}^\beta_\alpha = \frac{3}{2}\,\frac{Q_0}{(j+1)(2j+3)}\left[g_{\alpha j}(\widehat{j}^\beta \widehat{j}^\gamma + \widehat{j}^\gamma \widehat{j}^\beta) - \frac{2}{3}\delta^\beta_\alpha \widehat{j}^2\right]; \tag{6}$$

где

$$Q^\beta_{0\alpha} = \int \delta\, dV\,(3x_\alpha x^\beta - x_\gamma x^\gamma \delta^\beta_\alpha) \quad Q_0 = Q^z_z.$$

Здесь $Q^\beta_{0\alpha}$ классический электрический квадрупольный момент, Q_0 — проекция этого момента или ось z; $\widehat{j}$ — оператор вектора полного момента системы, δ — плотность электрического заряда. Проекция проквантованного квадрупольного момента на какую-либо ось (на ось спина z) определяется выражением

$$Q = Q_0 \frac{j(2j-1)}{(2j+3)(j+1)}.$$

Поскольку $j = \frac{1}{2} + A\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}}$, то $2j - 1 = 2A\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}}$, где $A = \text{const}$ и $Q = \frac{Q_0 A}{6}\sqrt{\frac{G\hbar^2}{c^3 r_0^2}}$, причем членами второго порядка малости пренебрегаем, так как $\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}} \sim 10^{-20}$. Очевидно, что квадрупольный момент коммутирует с гамильтонианом системы и поэтому

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \dot{Q}_0 \frac{A}{6} \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}}; \quad \frac{d^3Q}{dt^3} = \dddot{Q}_0 \frac{A}{6} \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}},$$

$$\dddot{Q}^2 = \dddot{Q}_0^2 \frac{A^2}{36} \frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}.$$

Мощность излучения электромагнитных волн дается выражением

$$-\dot{E}_э = \frac{(\dddot{Q}_\alpha^\beta \dddot{Q}_\beta^\alpha)}{45c^5} = \frac{\dddot{Q}^2}{45c^5} = \frac{\dddot{Q}_0^2 A^2 G\hbar}{3645 c^8 r_0^2}.$$

Поскольку $Q_0 = Ber_0^2$ (где $B = B(t)$), то $-\dot{E}_э = \frac{\dddot{B}^2 A^2 G\hbar e^2 r_0^4}{36 \cdot 45 \cdot c^8}$.

В простейшем случае $B = B_0 \sin \omega t: \dddot{B}^2 = B_0^2 \omega^6 \cos^2 \omega t$ — среднее значение $\overline{\dddot{B}^2} = \frac{B_0^2}{2} \omega^6$ и

$$-\dot{E} = \frac{B_0^2 A^2 \alpha G\hbar}{36 \cdot 90 c r_0^4} \left(\frac{\omega r_0}{c}\right)^6, \text{ где } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Поскольку $\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2} = \hbar_g$, то

$$-\dot{E} = -\dot{E}_g = \frac{B_0^2 A^2 \alpha c^2 \hbar_g}{36 \cdot 90 r_0^2} \left(\frac{\omega r_0}{c}\right)^6 = \frac{B_0^2 A^2 \alpha h_g \omega^2}{36 \cdot 90} \left(\frac{\omega r_0}{c}\right)^4.$$

Далее, так как $\hbar = \beta m r_0 c$ (где $\beta = \text{const}$), то

$$-\dot{E}_g = \frac{B_0^2 A^2 \beta^2 \alpha G m^2 c}{36 \cdot 90 r_0^2} \left(\frac{\omega r_0}{c}\right)^6. \tag{7}$$

Если рассматривать механический квадрупольный момент, происходящий вследствие «дрожания» частиц из-за излучения и поглощения виртуальных мезонов для нуклонов, фотонов или электронов, то, поскольку $D = D_{гр} = B^* m r_0^{*2} = \frac{Q_{гр}}{\sqrt{G}}$ (где $B^* = B^*(t) = B^* \sin \omega t$), найдем

$$-\dot{E}_g = \frac{B_0^{*2} G m^2 c}{90 r_0^{*2}} \left(\frac{\omega r_0^*}{c}\right)^6. \tag{8}$$

Для простейшего кругового квадруполя $B_0^2 = B_0^{*2} = 2 \cdot 288$, сравнивая (7) и (8), получим

$$\frac{r_0^*}{r} = \left(\frac{A\beta}{6}\right)^{1/2} (\alpha)^{1/4} \simeq \frac{1}{10} \sqrt{2\beta A}.$$

Сила лучистого гравитационного трения:

$$F = -\frac{\dot{E}_g}{c} \frac{r_0^{*2}}{r^2} = \frac{B_0^{*2} G m^2}{90 r^2} \left(\frac{\omega r_0^*}{c}\right)^6 = 6 \frac{Gm^2}{r^2} \left(\frac{\omega r^*}{c}\right)^6 = \frac{Gm^2}{r^2},$$

откуда $\left(\frac{\omega r_0^*}{c}\right)^6 = \frac{1}{3 \cdot 2}$ или $r_0^* = 10^{-14}\ см \ll \frac{c}{\omega}$, что соответствует действительности. При этом для нуклона $\beta = 1$, $r_0 = 10^{-13}$ *см*; а для электрона $\beta = 10^3$ $r_0 = 10^{-14}$ *см*.

Поскольку

$$-\dot{E}_g = \hbar_g \omega^2 = E_g \omega; \quad \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\hbar_g}{\hbar} = \frac{E_g}{E_p} = 10^{-40} = \frac{1}{T_m},$$

то $-\dot{E}_g = \alpha E_p$, где $\alpha = 10^{-17}$ *сек*$^{-1}$ — постоянная Хэббла; $\alpha = \frac{1}{t_m}$, $t_m = 10^{17}$ *сек* возраст Метагалактики. Тот же результат будет при $s = 0$; $\dot{j} = \frac{A^*}{2}\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3 r_0^2}}$, где $A^* = 2A$.

Теперь можно сделать фундаментальный вывод, что соотношение Эйнштейна (5) справедливо не только для макроскопических систем (двойные звезды), но и для микроскопических квантовых систем, таких, как атомы и структурные элементарные частицы [8].

В самом деле, квантование самого гравитационного поля имеет смысл проводить лишь при $r \leqslant 10^{-33}$ *см* или при $E_p \geqslant 10^{17}$ *эрг*. Элементарные частицы имеют размеры 10^{-13} *см* и энергии порядка 10^{-3}—10^{-7} *эрг* и с «точки зрения» квантованного гравитационного поля являются макроскопическими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. ДАН СССР, **168**, № 4, 1966.
2. Марков М. А. В сб.: «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц». Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 67.
3. Станюкович К. П. В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966, стр. 267.
4. Блохинцев Д. И. Флюктуация пространственно-временной метрики. Тезисы доклада на I Советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, 1961.
5. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. Phys. Rev., **78**, 29, 1950.
6. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, гл. 4, § 6. М., ИЛ, 1963.
7. Эйнштейн А. О гравитационных волнах, т. 1. М., «Наука», 1965, стр. 631.
8. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы, ч. II, § 8. М., «Наука», 1966.

Поступила в редакцию
14. 7 1966 г.

Кафедра
теоретической физики