Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1968

УДК 539.12.01

А. И. НАУМОВ

УНИТАРНО-ИНВАРИАНТНАЯ СХЕМА НЕЛИНЕЙНОЙ СПИНОРНОЙ ТЕОРИИ

Предлагается унитарно-инвариантная схема нелинейной спинорной теории, в которой первичное поле $\psi(x)$ преобразуется по фундаментальному представлению группы $SU(3)$ и не имеет затравочной массы. Вакуум считается вырожденным по некоторым квантовым числам. Это позволяет получить для массы физического кварка отличное от нуля значение, причем его массовая матрица спонтанно расщепляется. Сначала рассмотрение проводится в рамках обычной теории, а затем в пространство состояний вводится индефинитная метрика. Последнее обстоятельство позволяет избежать появления расходимостей. Для массы Λ-кварка получено значение, примерно на 22% большее массы нуклона.

В работах группы Гейзенберга (см., например, [2]) и других авторов развивается нелинейная спинорная теория элементарных частиц, основой которой является одно первичное поле $\psi(x)$. Оно удовлетворяет нелинейному уравнению Гейзенберга—Иваненко [2 и 3], получающемуся из следующей функции Лагранжа общего вида:

$$L = L_0 + L_i = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\vec{\partial}_\mu\psi + \frac{1}{2}g\sum_n C_n{:}(\bar{\psi}\Gamma_n\psi)(\bar{\psi}\Gamma_n\psi). \qquad (1)$$

Здесь

$$\Gamma_S = I, \quad \Gamma V = \gamma_\mu, \quad \Gamma_T = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

$$\Gamma_A = i\gamma_5\gamma_\mu, \quad \Gamma_P = \gamma_5,$$

g — контанта самодействия, C_n — произвольные действительные числа. Для включения в теорию изотопических свойств Гейзенбергом с сотрудниками (работы [4—6] и многие другие) предлагается рассматривать оператор $\psi(x)$ как величину, преобразующуюся по представлению группы $P\otimes SL(2, C)\otimes SU(2)$ (четырехкомпонентный спинор в обычном пространстве и двухкомпонентный — в изотопическом) или группы $SL(2, C)\otimes SU(2)$ (двухкомпонентный спинор и в обычном и в изотопическом пространствах). Тогда для введения в схему нелинейной теории странных частиц приходится прибегать к весьма сложному и искусственному спурионному формализму [6].

С другой стороны, благодаря исследованиям последних лет столь же классической как изотопическая стала унитарная симметрия, основанная на группе $SU(3)$. Поэтому естественно попытаться объединить основные идеи нелинейной спинорной теории с достижениями теоретико-группового направления. Эта мысль была высказана в работе [1] (независимо аналогичный подход предложен Маршаком и Окубо [7]). В данной статье она развивается, и в рамках унитарно-инвариантной схемы нелинейной теории проводится расчет массового расщепления кваркового триплета.

Итак, считаем, что первичное поле $\psi(x)$ преобразуется по фундаментальному представлению группы $P \otimes SL(2C) \otimes SU(3)$, т. е. является четырехкомпонентным спинором в обычном пространстве и трехкомпонентным в пространстве унитарного спина. Если, как обычно, отождествить операторы T_3 и Y с генераторами $\frac{1}{2}\Lambda_3$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_8$ соответствующих представлений, то трем компонентам первичного поля следует приписать квантовые числа кварков. Наблюдаемые мезоны строятся из кварка и антикварка, барионы — из трех кварков. Чтобы написать лагранжиан, инвариантный относительно рассматриваемой группы, следует прежде всего составить из ψ и $\bar{\psi}$ унитарные инварианты четвертой степени. Таковых два:

$$J_0^2 = (\bar{\psi}\psi)^2 \text{ и } J_\alpha^2 = (\bar{\psi}\lambda_\alpha\psi)^2. \tag{2}$$

Используя алгебраические свойства λ-матриц, в частности соотношение полноты

$$\delta_i^k \delta_l^j = \frac{1}{2} (\lambda_\mu)_i^j (\lambda_\mu)_l^k \tag{3}$$

$$\left(\mu = 0, 1, \ldots, 8;\ \lambda_0 \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}\, I\right),$$

получаем

$$I_\alpha^2 = \frac{4}{3} I_0^2. \tag{4}$$

Учтем теперь, что между пятью лоренцевскими инвариантами также существует ряд соотношений

$$I_A^2 = I_V^2 = I_S^2 - I_P^2, \quad I_T^2 = I_S^2 + I_P^2, \tag{5}$$

что позволяет выразить их, например, через I_S^2 и I_P^2. Тогда общий вид унитарно- и лоренц-инвариантного нелинейного лагранжиана при ограничении низшей степенью нелинейности таков:

$$L = \frac{1}{2} \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + m_0\bar{\psi}\psi + a(\bar{\psi}\psi)^2 + b(\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2. \tag{6}$$

Потребуем дополнительной инвариантности относительно преобразования Тушека [8]:

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma_5}\psi; \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}. \tag{7}$$

Это делается для того, чтобы «голые» кварки («пракварки») обладали определенной киральностью (ср. с [9] и [10]). Тогда вид нелинейного лагранжиана фиксируется почти однозначно:

$$L = \frac{1}{2} \bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{2} g\,[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma_5\psi)^2]. \tag{8}$$

Здесь все γ-матрицы представляют прямую сумму трех соответствующих матриц Дирака. Из (5) следует, что в случае, когда $\psi(x)$ является классическим полем, функция Лагранжа сводится или к векторному или к аксиальному варианту. Во вторично квантованной теории два последних также удовлетворяют всем необходимым свойствам симметрии, но не являются эквивалентными. Имея в виду выделенную роль векторной нелинейности, которая проявляется при расчете масс мезонов и их констант связи с нуклоном [11], мы на ней и остановимся. К этому же результату можно прийти и из чисто теоретико-групповых соображений. Согласно работе [7], в случае рассматриваемой трехполевой модели появляются некоторые дополнительные симметрии, более высокие, чем $SU(3)$. Они связаны с раздельным преобразованием двухкомпонентных спиноров φ и χ и различны при разных типах нелинейности:

$$S, P \to O(6); \quad A \to U(6); \quad T \to Sp(6); \quad V \to W_3 = U^+(3) \otimes U^-(3). \tag{9}$$

Отсюда видно, что во всех случаях, кроме V-варианта, симметрия оказывается заведомо выше наблюдаемой на эксперименте.

Наш подход существенно отличается от схемы кварков Гелл-Манна—Цвейга.

Во-первых, теория включает динамику. Во-вторых, схема γ_5-инвариантна и у голых кварков $m=0$. И в-третьих, лагранжиан полностью симметричен и не включает никаких дополнительных параметров, кроме константы самодействия, модуль которой имеет смысл квадрата фундаментальной длины. Для объяснения наблюдаемого нарушения $SU(3)$-инвариантности, в частности, расщепления унитарных мультиплетов по массе, будем считать, что вакуумное состояние вырождено по гиперзаряду. Таким образом, мы принимаем идеологию спонтанного нарушения симметрии [9—10] и [12—13]. Покажем, как в излагаемой схеме вычисляется масса кварков. Так как вакуум считается асимметричным по гиперзаряду, то массовую матрицу следует искать в виде

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = m'(\lambda_0)_{ij} + m''(\lambda_8)_{ij}; \quad \left. \begin{aligned} m' &= \frac{m-\mu}{\sqrt{3}} \\ m'' &= \frac{2m+\mu}{\sqrt{6}} \end{aligned} \right\}. \tag{10}$$

Свободная причинная функция имеет аналогичную структуру:

$$G(p) = \frac{1}{\hat{p} - iM} = G'(p)\lambda_0 + G''(p)\lambda_8. \tag{11}$$

Чтобы отыскать для массовой матрицы нетривиальное решение, перепишем формально лагранжиан в виде (сравни с [9]—[10])

$$L = L_0 + L_i \equiv L_0' + L_i' = (L_0 + \bar{\psi}M\psi) + (L_i - \bar{\psi}M\psi). \tag{12}$$

Условие компенсации или самосогласованности имеет вид, показанный на рис. 1.

Явно оно записывается следующим образом:

$$M_{ij} = -\frac{g}{12}\int \frac{dp}{(2\pi)^4}\left\{10\delta_{ij}\,Sp\left(\frac{1}{\hat{p}-iM}\right) - (\tilde{\lambda}_8)_{ij}\,Sp\left(\frac{\tilde{\lambda}_8}{\hat{p}-iM}\right)\right.. \tag{13}$$

Здесь введено обозначение $\tilde{\lambda}_8 \equiv \sqrt{\frac{1}{3}}\,\lambda_8$. После вычисления шпуров по дираковским и унитарным индексам получим систему уравнений

$$
\left.\begin{aligned} m &= 6gmF(m) + 4g\mu F(\mu) \\ \mu &= 8gmF(m) + 2g\mu F(\mu) \end{aligned}\right\}, \tag{14}
$$

где

$$
F(x) \equiv -i \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + x^2 - i\varepsilon} = \frac{1}{16\pi^2}\left[L^2 - x^2 \ln\left(1 + \frac{L^2}{x^2}\right)\right] \tag{15}
$$

(введен обрезающий импульс L).

По крайней мере два решения этой системы очевидны.

1. $m=\mu=0$ — полностью тривиальное решение, соответствующее симметричному вакууму — именно его и можно получить по обычной теории возмущений.

2. $m=\mu\neq 0$, причем при определенных условиях, исследованных в [9] и [10], массы положительны. Этот случай соответствует частичному нарушению симметрии вакуума — только по киральности.

Но при определенных условиях будет существовать и решение типа $m>\mu>0$, которое нас интересует. Оно соответствует снятию вырож-

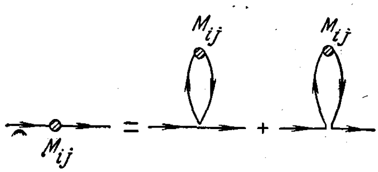

Рис. 1

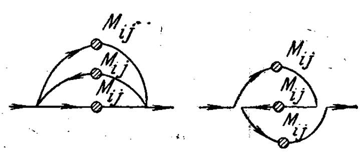

Рис. 2

дения вакуума и по киральности и по гиперзаряду. В этом случае симметрия понижается с $SU(3)$ до $SU(2)\otimes U(1)$.

Заметим, что уравнения, подобные (14), путем анализа приближенных решений уравнений Швингера—Дайсона были получены в [13]. Там же аккуратно проанализированы условия, при которых реализуется тот или иной тип решения. Но полученные выше результаты имеют лишь академический интерес вследствие появления неопределенного обрезающего импульса. Основная их ценность состоит в том, что они указывают на возможность применения несколько модифицированной теории возмущений в случае вырожденности вакуума по унитарным квантовым числам. При этом получаются нетривиальные решения с ожидаемой степенью нарушения симметрии, что привлекательно с точки зрения построения единой теории элементарных частиц.

Учтем тот факт, что пространство состояний в нелинейной спинорной теории несет индефинитную метрику [2]. В работах [14], [11] проведен анализ возможности применения в такой схеме несколько обобщенной теории возмущений, когда матрица рассеяния записывается в виде

$$
S = \widetilde{T} \exp \left\{ i \int L_i^{in}(x)\, dx \right\}. \tag{16}
$$

Символ $\widetilde{T}$ означает, что в качестве свободных концов диаграмм следует брать физические операторы $\psi_{in}^{(out)}(x)$, соответствующие частицам массы m, но функция свертки является полной. Она включает вклады «призраков» и тождественна гейзенберговскому выражению [2]

$$
G^{(c)}(p) = -\frac{\hat{p} + im}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} + \frac{\hat{p} + im}{p^2 - i\varepsilon} - \frac{m^2 \hat{p}}{(p^2 - i\varepsilon)^2}. \tag{17}
$$

При таком подходе индекс сходимости любой диаграммы равен

$$D = -4(V-1) \tag{18}$$

(V — число вершин), что обеспечивает конечность всех членов разложения по теории возмущений [1].

Применим эту схему для расчета массового расщепления кваркового триплета. Снова вакуум считаем вырожденным по гиперзаряду, так что массовую матрицу следует искать в виде (10), а в пропагаторе (17) нужно заменить m на M_{ij}.

Во втором порядке теории возмущений вклад в массовый оператор дают диаграммы рис. 2.

В результате нехитрых выкладок в векторном варианте нелинейной теории получим следующее уравнение для матрицы M:

$$M = -\frac{4ig^2}{(2\pi)^8}\int dkdq\,\{4G(-p+k+q)\,tr\,[G(k)\,G(q)] +$$
$$+ 2G(-p+k+q)\,G(k)\,G(q) + 2G(-p+k+q)\,tr\,[G_\alpha(k)\,G_\alpha(q)] +$$
$$+ G(-p+k+q)\,G_\alpha(k)\,G_\alpha(q)\}. \tag{19}$$

Здесь знак tr означает шпурование по унитарным индексам и введено обозначение

$$G^{(c)} \equiv \gamma_\alpha G_\alpha + G. \tag{20}$$

При такой записи тривиальное решение $m=\mu=0$ отброшено. Так как все частицы берутся на массовой оболочке, то в первых двух компонентах уравнения надо положить $p^2=-m^2$, а в последних $p^2=-\mu^2$.

После параметризации, проведения интегрирования по промежуточным импульсам и по некоторым из параметров (см. [14]) и вычисления шпуров, получим следующую систему для определения масс m и μ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{5}{4}\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^4(2a+b) + \left(\frac{ml}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^2 a^{(m)} - \frac{1}{2}\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^4 b^{(m)} = 1,\\ &\frac{3}{4}\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^4(2a+b) + 2\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^4\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^4 a^{(\mu)} - \left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^4 b^{(\mu)} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Здесь a и b — определенные двойные несобственные интегралы, фигурирующие в [14]. Они были вычислены на электронной машине Е. М. Воробьевым, за что автор ему чрезвычайно признателен:

$$a = 1{,}700, \qquad b = 1{,}796. \tag{22}$$

Величины $a^{(m)}$, $a^{(\mu)}$, $b^{(m)}$ и $b^{(\mu)}$ аналогичны интегралам a и b, но в них входит в качестве параметра отношение $\frac{m^2}{\mu^2}$. Однако, так как зависимость от этого параметра является слабой и так как мы ожидаем получить значение $\frac{m}{\mu}$ порядка 1, то в достаточно хорошем приближении можно все

---

[1] В теориях с индефинитной метрикой возникают трудности, связанные с физической интерпретацией и с возможностью построения унитарной и макропричинной матрицы рассеяния. Их анализу посвящено большое число работ. Попытка исследования этих вопросов в аксиоматическом подходе предпринята автором в работе [16]. Там же можно найти и библиографию.

индексы у интегралов снять. После этого система (21) с учетом (22) принимает простой вид

$$1{,}1\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^4+1{,}7\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^2=1,$$
$$3{,}4\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^2\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^2-0{,}6\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^4=1. \qquad (23)$$

Она имеет два решения. Одно из них

$$\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^4=\left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^4=0{,}36 \qquad (24)$$

относится к полутривиальному типу и нас сейчас не интересует. Оно обсуждалось в работе [14]. Второе решение имеет вид

$$\left(\frac{ml}{2\pi}\right)^4=0{,}25,\quad \left(\frac{\mu l}{2\pi}\right)^4=0{,}75 \text{ или } m=\frac{4{,}4}{l},\quad \mu=\frac{5{,}7}{l}.$$

Так как в указанные интегралы входит величина $m^2/\mu^2=0{,}62$, то сделанное приближение можно считать более или менее законным.

Таким образом, имеется единственное нетривиальное решение, соответствующее спонтанному расщеплению кварка по массе. Масса Λ-кварка больше массы нуклонного кварка, что всегда априори и предполагается в кварковой модели при феноменологическом учете взаимодействия [15]. При этом нуклонный кварк менее массивен, чем Λ-кварк, примерно на 22%, т. е. и количественно имеется согласие с обычными предположениями.

Однако к последнему результату следует относиться с достаточной осторожностью. Из работ [14], [11] следует, что в рассматриваемой теории возмущений параметром разложения фактически является величина $\left(\frac{ml}{4\pi}\right)^2$, равная приблизительно 0,15—0,20. Она не столь уж мала, чтобы можно было считать выбранное выше приближение вполне надежным. Поэтому полученные здесь результаты скорее следует рассматривать не как количественные, а как качественные.

Мы не рассматривали вопросов, связанных с возможным появлением голдстоуновских бозонов [17] вследствие спонтанного нарушения унитарной симметрии. Это обсуждение увело бы очень далеко в сторону; кроме того, в настоящее время справедливость теоремы Голдстоуна, по крайней мере в ее первоначальной форме, является достаточно сомнительной и оспаривается многими авторами.

Автор благодарен проф. Д. Д. Иваненко за постоянное внимание к работе и стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наумов А. И. «Изв. вузов», физика, № 5, 137, 1965.
2. Сб. «Нелинейная квантовая теория поля» под ред. проф. Д. Д. Иваненко. М., ИЛ, 1959.
3. Ivanenko D. D. Phys. Zs. Sowjetunion, **13**, 141, 1938; Иваненко Д. Д., Бродский А. М. ДАН СССР, 84, 683, 1952; ЖЭТФ, **24**, 384, 1953.
4. Dürr H. P. Zs. Naturforsch., **16A**, 327, 1961.
5. Dhar J., Katayama Y. Nuovo Cim., **36**, 533, 1965.
6. Dürr H. P., Heisenberg W. Nuovo Cim., **37**, 1446, 1965.
7. Okubo S., Marschak R. E. Phys. Rev. Let., **13**, 818, 1964; **14**, 156, 1965.

8. Touschek B. Nuovo Cim., **5**, 754, 1281, 1957.
9. Nambu Y., Yona-Lasinio G. Phys. Rev., **122**, 345, 1961; **124**, 246, 1961.
10. Наумов А. И. ЖЭТФ, **47**, 914, 1964.
11. Наумов А. И. «Изв. вузов», физика, № 11, 1, 1967.
12. Marschak R. E., Okubo S., Nuovo Cim., **19**, 1226, 1961.
13. Baker M., Glashow S. L. Phys. Rev., **128**, 2462, 1962.
14. Наумов А. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 2, 1967.
15. Zweig G. Preprint CeRN, 1964.
16. Наумов А. И. «Ядерная физика», **6**, 664, 1968.
17. Goldstone J. S., Salam A., Weinberg S. Phys. Rev., **127**, 965, 1962.

Поступила в редакцию
16. 3 1967 г.

Кафедра
теоретической физики