Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1968

УДК 621.372.061

В. В. ВОЛКОВ, К. Ф. ТЕОДОРЧИК

КОРНЕВОЕ РАССМОТРЕНИЕ ОШИБОК УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА В ЛИНЕЙНЫХ САУ

Рассмотрена связь ошибки в установившемся режиме с расположением на комплексной плоскости s полюсов и нулей исходной разомкнутой системы. Связь эта геометрически просто выражается через расстояния полюсов и нулей исходной разомкнутой системы от начала координат плоскости s и значение ее коэффициента усиления K_0. Дана оценка влияния неидеальности интеграторов на ошибку.

В широко известной работе С. П. Стрелкова [1] рассмотрены условия, которые необходимо наложить на расположение полюсов и нулей замкнутой линейной САУ для возможно более точного воспроизведения системой внешних воздействий, спектр которых задан. При этом дается метод оценки ошибок в неустановившемся режиме по расположению полюсов и нулей замкнутой системы. Однако, как показывает общая теория траекторий корней [2], данное расположение полюсов и нулей замкнутой системы может быть получено из континуума исходных разомкнутых систем, отличающихся друг от друга расположением полюсов и нулей и значением коэффициента усиления K_0. Благодаря этому возникает задача о влиянии на воспроизведение значения K_0 и расположения полюсов и нулей исходной разомкнутой системы, которые, как известно, определяют установившуюся ошибку.

Вопрос о влиянии на установившуюся ошибку числа полюсов разомкнутой системы, лежащих в начале координат (идеальных интеграторов), хорошо исследован с временной точки зрения [3, 4]. Однако полную информацию, допускающую к тому же наглядную геометрическую интерпретацию, дает рассмотрение расположения полюсов и нулей исходной разомкнутой системы. Такое рассмотрение позволяет также исследовать влияние неидеальности интеграторов на установившуюся ошибку.

Будем придерживаться принятой в литературе [4] классификации САУ по количеству полюсов разомкнутой системы в начале координат. Запишем передаточную функцию исходной разомкнутой системы в виде, явно содержащем ее полюса и нули:

$$W_0(s) = \frac{K_0 Q_m(s)}{P_n(s)} = \frac{K_0 (s+\delta)\ldots[(s+\alpha)^2+\beta^2]\ldots}{s^N (s+d)\ldots[(s+a)^2+b^2]\ldots}, \tag{1}$$

где $Q_m(s)$ и $P_n(s)$ — полиномы от s степеней m и n соответственно.

Показатель степени N характеризует класс системы (число идеальных интеграторов).

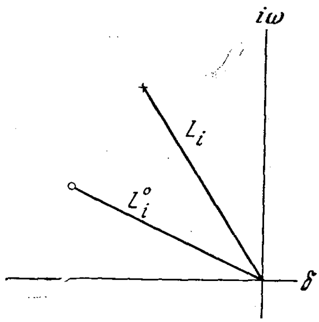
Сигнал рассогласования (ошибка) $E(s)$ выражается через передаточную функцию исходной разомкнутой системы $W_0(s)$ и входное воздействие $X(s)$ следующим образом:

$$E(s) = \frac{1}{1+W_0(s)} \cdot X(s). \tag{2}$$

По теореме предельных значений [5] ошибка в установившемся режиме (при $t \to \infty$) равна

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+W_0(s)} \cdot X(s). \tag{3}$$

Рассмотрим установившуюся ошибку для трех типовых входных функций: единичной (ступенька положения)



$$x(t) = 1(t) \doteqdot X(s) = \frac{1}{s}, \tag{4}$$

линейной (ступенька скорости)

$$x(t) = t \doteqdot X(s) = \frac{1}{s^2} \tag{5}$$

и параболической (ступенька ускорения)

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 \doteqdot X(s) = \frac{1}{s^3}. \tag{6}$$

Для системы класса $N=0$ и единичной ступеньки положения, учитывая (1), (3) и (4), имеем

$$\varepsilon_{\text{уст}}|_{N=0} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+W_0(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{P_n(0)}{P_n(0)+K_0 Q_m(0)}. \tag{7}$$

Обращаясь к формуле (1), при $N=0$

$$P_n(0) = \prod_1^n L_i \text{ и } Q_m(0) = \prod_1^m L_i^0, \tag{8}$$

где L_i (соответственно L_i^0) обозначает расстояние от начала координат до i-того полюса (соответственно нуля) (см. рис.).

Таким образом, окончательно из (7) и (8) получим

$$\varepsilon_{\text{уст}}|_{N=0} = \frac{\prod_1^n L_i}{\prod_1^n L_i + K_0 \prod_1^m L_i^0}. \tag{9}$$

Для систем класса $N \geqslant 1$ формула (3) при учете (1) дает установившуюся ошибку, равную нулю.

Аналогичные вычисления дают

Для ступеньки скорости $X(s)=\frac{1}{s^2}$

$$\varepsilon_{\text{уст}}\Big|_{N=0}=\infty;\quad \varepsilon_{\text{уст}}\Big|_{N=1}=\frac{\prod\limits_{1}^{n-1} L_i}{K_0\prod\limits_{1}^{m} L_i^0};\quad \varepsilon_{\text{уст}}\Big|_{N\geqslant 2}=0. \tag{10}$$

Для ступеньки ускорения $X(s)=\frac{1}{s^3}$

$$\varepsilon_{\text{уст}}\Big|_{N=0,1}=\infty;\quad \varepsilon_{\text{уст}}\Big|_{N=2}=\frac{\prod\limits_{1}^{n-2} L_i}{K_0\prod\limits_{1}^{m} L_i^0}\ \text{и}\ \varepsilon_{\text{уст}}\Big|_{N\geqslant 3}=0. \tag{11}$$

Эти результаты приведены в таблице.

Класс системы	Воздействие		
	ступенька положения $1/s$ (уст. ошибка)	ступенька скорости $1/s^2$ (уст. ошибка)	ступенька ускорения $1/s^3$ (уст. ошибка)
$N=0$	$\frac{\prod\limits_1^n L_i}{\prod\limits_1^n L_i+K_0\prod\limits_1^m L_i^0}$	∞	∞
$N=1$	0	$\frac{\prod\limits_1^{n-1} L_i}{K_0\prod\limits_1^m L_i^0}$	∞
$N=2$	0	0	$\frac{\prod\limits_1^{n-2} L_i}{K_0\prod\limits_1^m L_i^0}$

K_0 означает значение коэффициента усиления исходной разомкнутой системы. В произведениях $\prod L_i$ выпадают нулевые полюсы, определяющие класс системы.

В случае бесконечных ошибок представляет интерес выяснить закон их нарастания.

Обычно в литературе [3, 4] вычисляют предварительно коэффициент ошибки по положению, равный в наших обозначениях для систем класса $N=0$

$$k_p = \lim_{s\to 0} W_0(s) = \frac{K_0 \prod_1^m L_i^0}{\prod_1^n L_i}$$

и связанный с установившейся ошибкой положения соотношением

$$\varepsilon_{уст}\Big|_{N=0} = \frac{1}{1+k_p},$$

а также коэффициенты ошибок по скорости k_v и ускорению k_a, являющиеся обратными величинами установившихся ошибок по скорости и ускорению.

Рассмотрим, например, ошибку по скорости для системы класса $N = 0$. Из (2) при $X(s) = \frac{1}{s^2}$ получим

$$E(s) = \frac{1}{s^2}\,\frac{1}{1+W_0(s)}. \tag{12}$$

Вычеты в корнях уравнения $1+W_0(s)=0$ [5] дадут экспоненциально затухающие колебательные или апериодические члены (система предполагается устойчивой). Вычеты в точке $s=0$ дадут члены без экспонент.

В результате для ошибки получим

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{1+W_0(s)}\right]_{s=0} t + \left[\frac{d}{dS}\,\frac{1}{1+W_0(s)}\right]_{s=0} + 0(t). \tag{13}$$

Через $0(t)$ здесь обозначены члены с экспонентами, стремящиеся с ростом t к нулю. Отбрасывая эти члены, дающие заметный вклад только при конечных t, получим линейную функцию, являющуюся асимптотой ошибки $\varepsilon(t)$ при $t\to\infty$.

Второй член в (13) есть константа, а угловой коэффициент при t в первом члене, как следует из (1), при $N=0$ имеет вид

$$\frac{1}{1+W_0(s)}\Big|_{s=0} = \frac{\prod_1^n L_i}{\prod_1^n L_i + K_0 \prod_1^m L_i^0}. \tag{14}$$

Таким образом, для асимптотического значения ошибки получаем окончательно

$$\varepsilon(t)\Big|_{N=0} \frac{\prod_1^n L_i}{\prod_1^n L_i + K_0 \prod_1^m L_i^0}\, t + \text{const}. \tag{15}$$

Аналогично рассматривая параболическую входную функцию (ступеньку ускорения), получим для асимптотических значений ошибок следующие выражения:

$$\varepsilon(t)\Big|_{N=0} = \frac{\prod_1^n L_i}{\prod_1^n L_i + K_0 \prod_1^m L_i^0}\,\frac{1}{2} t^2 + Ct + C_1 \tag{16}$$

и

$$\varepsilon(t)\big|_{N=1} = \frac{\prod\limits_{1}^{n-1} L_i}{K_0 \prod\limits_{1}^{m} L_i^0}\, t + C_2, \tag{17}$$

где C, C_1 и C_2 — константы.

Из этих формул ясно влияние неидеальности интеграторов на ошибку: зная расстояния от начала координат до ближайших корней, можно оценить время, в течение которого интегрирование можно считать идеальным и систему принадлежащей к некоторому не нулевому классу, определяемому числом, достаточно близким к началу координат полюсов разомкнутой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелков С. П. «Автоматика и телемеханика», **9**, 233, 1948; **10**, 274, 1949.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
3. Кузовков Н. Т. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М., Оборонгиз, 1960.
4. Винцент дель Торо, Сидней Р. Паркер. Принципы проектирования систем автоматического управления. М., Машгиз, 1963.
5. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л. Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию
6. 4 1967 г.

Кафедра
физики колебаний