ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1968

УДК 521.13

Л. Г. ЛУКЬЯНОВ

ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Получено общее решение уравнений в вариациях в виде рядов, расположенных по степеням некоторого параметра порядка эксцентриситета. Независимая переменная входит в общее решение только под знаками синусов и косинусов.

По полученным формулам проведены вычисления траекторий движения бесконечно малой массы вблизи треугольных лагранжевых решений системы Земля—Луна и проведено сравнение этих вычислений с результатами численного интегрирования уравнений движения ограниченной эллиптической задачи.

§ 1. Дифференциальные уравнения для возмущений

Для исследования движения бесконечно малой массы под действием притяжения двух конечных масс, которые движутся по кеплеровским эллипсам с эксцентриситетом e, воспользуемся координатами Нехвила x, y, z с истинной аномалией v в качестве независимой переменной. Начало координат системы $Oxyz$ находится в центре инерции конечных масс $(1-\mu)$ и μ, плоскость Oxy совпадает с плоскостью движения этих масс, ось Ox направлена на меньшую массу μ. Единицы измерений выбраны так, что сумма конечных масс, постоянная тяготения и расстояние между конечными массами равны единице.

Дифференциальные уравнения движения бесконечно малой массы в указанной системе координат имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dv^2} - 2\frac{dy}{dv} &= \bar{r}\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{dx}{dv} &= \bar{r}\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dv^2} &= \bar{r}\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\Omega = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{ez^2\cos v}{2}; \quad \bar{r} = \frac{1}{1+e\cos v},$$

$$r_1^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2.$$

Уравнения (1) имеют частное решение $L_4: x_0 = \frac{1-2\mu}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_0 = 0$, которое означает, что три тела образуют неизменный с течением времени равносторонний треугольник.

Уравнения в вариациях, которые получаются путем разложения правых частей уравнений (1) в ряды по степеням величин $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, $\zeta = z - z_0$ и сохранения только линейных членов, распадаются на систему четвертого порядка для ξ и η и систему второго порядка для ζ. Последняя легко интегрируется и определяет простые гармонические колебания. Если ввести новые переменные $x_1 = \xi$, $x_2 = \eta$, $x_3 = \frac{d\xi}{dv}$, $x_4 = \frac{d\eta}{dv}$, то упомянутую систему четвертого порядка можно записать в виде

$$x' = Px, \tag{2}$$

где x — матрица-столбец с компонентами x_1, x_2, x_3, x_4,

$$P = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{r}\Omega_{xx} & \bar{r}\Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \bar{r}\Omega_{yx} & \bar{r}\Omega_{yy} & -2 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$\Omega_{xx} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{yy} = \frac{9}{4}, \quad \Omega_{xy} = \Omega_{yx} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu).$$

В дальнейшем используется разложение матрицы P в ряд Фурье:

$$P = P^{(0)} + 2\varepsilon D \cos v + 2\varepsilon^2 D \cos 2v + \ldots + 2\varepsilon^k D \cos kv + \ldots,$$

где

$$P^{(0)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bar{\Omega}_{xx} & \bar{\Omega}_{xy} & 0 & 2 \\ \bar{\Omega}_{yx} & \bar{\Omega}_{yy} & -2 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad D = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\Omega}_{xx} & \bar{\Omega}_{xy} & 0 & 0 \\ \bar{\Omega}_{yx} & \bar{\Omega}_{yy} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$\bar{\Omega}_{xx} = \frac{\Omega_{xx}}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \bar{\Omega}_{xy} = \bar{\Omega}_{yx} = \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \bar{\Omega}_{yy} = \frac{\Omega_{yy}}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}-1}{e}.$$

§ 2. Построение общего решения уравнений в вариациях

При $\varepsilon = 0$ система (2) запишется в виде

$$x' = P^{(0)}x. \tag{3}$$

Определяющее уравнение этой системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид $|P^{(0)} - \lambda^{(0)}E| = 0$ или $\lambda^{(0)4} - \varphi\lambda^{(0)2} + \psi = 0$, где обозначено $\varphi = \bar{\Omega}_{xx} + \bar{\Omega}_{yy} - 4$, $\psi = \bar{\Omega}_{xx}\bar{\Omega}_{yy} - \bar{\Omega}_{xy}\bar{\Omega}_{yx}$.

В дальнейшем будем предполагать, что все корни определяющего уравнения $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}, \lambda_4^{(0)}$ являются чисто мнимыми и что среди них нет кратных или отличающихся на $\pm pi$, т. е.

$$\lambda_j^{(0)} - \lambda_s^{(0)} \neq \pm pi \tag{4}$$

$$(p = 0, 1, 2, \ldots; \; j \neq s; \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad s = 1, 2, 3, 4; \; i = \sqrt{-1}).$$

При этих предположениях характеристические показатели системы (2) можно представить в виде рядов [2]:

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + \lambda_j^{(1)}\varepsilon + \lambda_j^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots, \; (j = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Если все характеристические показатели различны, то система (2) будет иметь четыре независимых решения вида

$$x(v) = e^{\lambda v} y(v), \tag{6}$$

где $y(v)$ — периодическая функция с периодом 2π.

В системе (2) сделаем замену переменных по формуле (6). Тогда уравнения в вариациях запишутся в виде

$$y' = (P - \lambda E)\, y. \tag{7}$$

Это уравнение для каждого характеристического показателя (5) должно иметь хотя бы одно частное периодическое решение периода 2π. Будем искать такие периодические решения в виде рядов

$$y = y^{(0)} + y^{(1)}\varepsilon + y^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots . \tag{8}$$

Подставим (5) и (8) в (7) и приравняем члены с одинаковыми степенями параметра ε. Тогда получим

$$y^{(m)\prime} - (P^{(0)} - \lambda^{(0)}E)\, y^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} (2D\cos kv - \lambda^{(k)}E)\, y^{(m-k)}, \; (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из структуры этих уравнений видно, что функцию $y^{(m)}$ следует искать в виде $y^{(m)} = \sum\limits_{k=-m}^{m} a_k^{(m)} e^{ikv}$.

Для определения неизвестных коэффициентов $a_k^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$ получаем

$$[P^{(0)} - (\lambda^{(0)} + ik)\, E]\, a_k^{(m)} = \sum_{s=1}^{m} [\lambda^{(s)} E a_k^{(m-s)} - D\,(a_{k+s}^{(m-s)} + a_{k-s}^{(m-s)})], \tag{9}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots; \quad |k| \leqslant m).$$

При последовательном определении неизвестных коэффициентов будут иметь место равенства $\lambda^{(2r+1)} = 0$, а коэффициенты a_k^m можно выбирать так, что $a_k^{(m)} = 0$ при $(k + m)$ нечетном.

Для произвольного коэффициента $a_k^{(m)}$ при $k \neq 0$ получим

$$a_k^{(m)} = Q^{-1}(k) \sum_{j=1}^{m} [\lambda^{(j)} a^{(m-j)} - D\,(a_{k-j}^{(m-j)} + a_{k+j}^{(m-j)})], \tag{10}$$

где

$$Q(k) = P^{(0)} - (\lambda^{(0)} + ik)\, E, \qquad E \text{ — единичная матрица.}$$

Если $k=0$, то формула (10) не годится, так как $|Q| = 0$. Однако этой формулой можно пользоваться и в том случае, если через $Q(0)$ обозначить матрицу R

$$R = \left\| \begin{matrix} -\lambda^{(0)} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(0)} & 0 & 1 \\ \bar{\Omega}_{xx} & \bar{\Omega}_{xy} & -\lambda^{(0)} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Это возможно сделать ввиду произвольности выбора четвертого элемента матрицы-столбца $a_0^{(m)}$.

Коэффициенты, определяющие одно из возможных частных решений (6) с точностью до ε^2 включительно, приводятся ниже.

$$a_0^{(0)} = \begin{Vmatrix} \lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{yy} \\ -(2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}) \\ \lambda^{(0)}(\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{yy}) \\ -\lambda^{(0)}(2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}) \end{Vmatrix}, \quad \begin{aligned} &\lambda^{(1)} = 0, \quad a_0^{(1)} = 0, \\ &a_1^{(1)} = -[P^{(0)} - (\lambda^{(0)} + i)E]^{-1} D a_0^{(0)}, \\ &a_{-1}^{(1)} = -[P^{(0)} - (\lambda^{(0)} - i)E]^{-1} D a_0^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\alpha\lambda^{(0)^2} + \beta}{\gamma\lambda^{(0)^2} + \delta}\lambda^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \alpha &= -(\varphi + 1)^2(\varphi + 4)^2 + 4\psi(\varphi^2 + 6\varphi - 1) - 8\psi^2, \\ \beta &= \psi(\varphi + 1)(\varphi + 4)(\varphi + 5) - 4\psi^2(\varphi + 8), \\ \gamma &= [(\varphi + 1)^2 - 4\psi][\varphi(4\varphi + 1) - 8\psi], \\ \delta &= -2\psi(2\varphi + 1)[(\varphi + 1)^2 - 4\psi], \end{aligned}$$

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{xx}} \begin{Vmatrix} -(\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{yy}) f_1 + (2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}) f_2 + 2\lambda^{(0)^2}(\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{yy}) \dfrac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(0)}} - \\ - \bar{\Omega}_{xy}(2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}) \dfrac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(0)}} \\ -(2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy})(\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{xx}) \dfrac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(0)}} \\ \lambda^{(0)}[-(\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{yy}) f_1 + (2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}) f_2] + \\ + \lambda^{(0)}(\lambda^{(0)^2} - \bar{\Omega}_{yy})(\lambda^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{xx}) \dfrac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(0)}} - \bar{\Omega}_{xy}\lambda^{(0)}(2\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}) \dfrac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(0)}} \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \{-\bar{\Omega}_{xx}[(\varphi + 1)(\varphi + 4) - 6] + \psi(\varphi + 1)\}\lambda^{(0)^2} + \{-\bar{\Omega}_{xx}[(\varphi + 1)(\varphi + 4) + \\ &+ 3\psi(\varphi + 3)] + \psi(\varphi + 1 + 2\psi)\}, \quad f_2 = -4\psi\lambda^{(0)^3} - \bar{\Omega}_{xy}[(\varphi + 1)(\varphi + 4) - \\ &- 6\psi]\lambda^{(0)^2} - 2\psi(\varphi + 3)\lambda^{(0)} - \bar{\Omega}_{xy}[(\varphi + 1)(\varphi + 4) + 3\psi(\varphi + 3)], \end{aligned}$$

$$a_1^{(2)} = 0, \quad a_{-1}^{(2)} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_2^{(2)} &= [P^{(0)} - (\lambda^{(0)} + 2i)E]^{-1} D [P^{(0)} - (\lambda^{(0)} + i)E]^{-1} D a_0^{(0)} - \\ &- [P^{(0)} - (\lambda^{(0)} + 2i)E]^{-1} D a_0^{(0)}, \\ a_{-2}^{(2)} &= [P^{(0)} - (\lambda^{(0)} - 2i)E]^{-1} D [P^{(0)} - (\lambda^{(0)} - i)E]^{-1} D a_0^{(0)} - \\ &- [P^{(0)} - (\lambda^{(0)} - 2i)E]^{-1} D a_0^{(0)}. \end{aligned}$$

Четвертый элемент матрицы-столбца $a_1^{(2)}$ и вся матрица-столбец $a_0^{(1)}$ ввиду произвольности их выбора положены равными нулю.

Таким путем могут быть построены четыре независимых частных решения (6), которые определят фундаментальную матрицу решений.

Общее решение системы (2) тогда запишется в виде $x(v) = X'(v)C$, где X' — транспонированная фундаментальная матрица решений, C — матрица-столбец произвольных постоянных.

§ 3. Окончательные формулы

Полученная фундаментальная матрица решений является матрицей с комплексными элементами, что неудобно при вычислениях. Фундаментальную матрицу с вещественными элементами можно получить из действительных и мнимых частей элементов полученной матрицы.

Фундаментальную матрицу решений с вещественными элементами будем также обозначать через X. Тогда для X имеем

$$X = X^{(0)} + \varepsilon X^{(1)} + \varepsilon^2 X^{(2)} + \ldots .$$

Введем обозначения:

$$\lambda_1 = i\Lambda_1,\ \lambda_2 = -i\Lambda_1,\ \lambda_3 = i\Lambda_2,\ \lambda_4 = -i\Lambda_2,$$

где $i = \sqrt{-1}$, а Λ_1, Λ_2 — действительные величины,

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(0)} + \Lambda_1^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots,\ \Lambda_2 = \Lambda_2^{(0)} + \Lambda_2^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots .$$

Ниже приводятся выражения для матриц $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$.

$$X^{(0)} = \left\| \begin{matrix} (\Lambda_1^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\cos\Lambda_1 v; & -\bar\Omega_{xy}\cos\Lambda_1 v - 2\Lambda_1^{(0)}\sin\Lambda_1 v; \\ -\Lambda_1^{(0)}(\Lambda_1^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\sin\Lambda_1 v; & -2\Lambda_1^{(0)2}\cos\Lambda_1 v + \bar\Omega_{xy}\Lambda_1^{(0)}\sin\Lambda_1 v \\ (\Lambda_1^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\sin\Lambda_1 v; & -\bar\Omega_{xy}\sin\Lambda_1 v + 2\Lambda_1^{(0)}\cos\Lambda_1 v; \\ \Lambda_1^{(0)}(\Lambda_1^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\cos\Lambda_1 v; & -2\Lambda_1^{(0)2}\sin\Lambda_1 v - \bar\Omega_{xy}\Lambda_1^{(0)}\cos\Lambda_1 v \\ (\Lambda_2^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\cos\Lambda_2 v; & -\bar\Omega_{xy}\cos\Lambda_2 v - 2\Lambda_2^{(0)}\sin\Lambda_2 v; \\ -\Lambda_2^{(0)}(\Lambda_2^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\sin\Lambda_2 v; & -2\Lambda_2^{(0)2}\cos\Lambda_2 v + \bar\Omega_{xy}\Lambda_2^{(0)}\sin\Lambda_2 v \\ (\Lambda_2^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\sin\Lambda_2 v; & -\bar\Omega_{xy}\sin\Lambda_2 v + 2\Lambda_2^{(0)}\cos\Lambda_2 v; \\ \Lambda_2^{(0)}(\Lambda_2^{(0)2} + \bar\Omega_{yy})\cos\Lambda_2 v; & -2\Lambda_2^{(0)2}\sin\Lambda_2 v - \bar\Omega_{xy}\Lambda_2^{(0)}\cos\Lambda_2 v \end{matrix} \right\|,$$

$$X^{(1)} = \left\| \begin{matrix} x_{11}^{(1)}, & x_{12}^{(1)}, & x_{13}^{(1)}, & x_{14}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)}, & x_{22}^{(1)}, & x_{23}^{(1)}, & x_{24}^{(1)} \\ x_{31}^{(1)}, & x_{32}^{(1)}, & x_{33}^{(1)}, & x_{34}^{(1)} \\ x_{41}^{(1)}, & x_{42}^{(1)}, & x_{43}^{(1)}, & x_{44}^{(1)} \end{matrix} \right\|, \quad X^{(2)} = \left\| \begin{matrix} x_{11}^{(2)}, & x_{12}^{(2)}, & x_{13}^{(2)}, & x_{14}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)}, & x_{22}^{(2)}, & x_{23}^{(2)}, & x_{24}^{(2)} \\ x_{31}^{(2)}, & x_{32}^{(2)}, & x_{33}^{(2)}, & x_{34}^{(2)} \\ x_{41}^{(2)}, & x_{42}^{(2)}, & x_{43}^{(2)}, & x_{44}^{(2)} \end{matrix} \right\|,$$

$$x_{11}^{(1)} = -\frac{a(\Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)}\cos(\Lambda_1+1)v + \frac{c(\Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)}\sin(\Lambda_1+1)v - $$
$$-\frac{a(\Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)}\cos(\Lambda_1-1)v - \frac{c(\Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)}\sin(\Lambda_1-1)v,$$

$$x_{12}^{(1)} = \frac{b(\Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)}\cos(\Lambda_1+1)v + \frac{d(\Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)}\sin(\Lambda_1+1)v + $$
$$+\frac{b(\Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)}\cos(\Lambda_1-1)v + \frac{d(\Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)}\sin(\Lambda_1-1)v,$$

$$x_{13}^{(1)} = \frac{\Lambda_1^{(0)}+1}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)}\left[c(\Lambda_1^{(0)}+1)\cos(\Lambda_1+1)v + a(\Lambda_1^{(0)}+1)\sin(\Lambda_1+1)v\right] +$$

$$+\frac{\Lambda_1^{(0)}-1}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)}\left[-c(\Lambda_1^{(0)}-1)\cos(\Lambda_1-1)v + a(\Lambda_1^{(0)}-1)\sin(\Lambda_1-1)v\right],$$

$$x_{14}^{(1)} = \frac{\Lambda_1^{(0)}+1}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)}\left[d(\Lambda_1^{(0)}+1)\cos(\Lambda_1+1)v - b(\Lambda_1^{(0)}+1)\sin(\Lambda_1+1)v\right] +$$

$$+\frac{\Lambda_1^{(0)}-1}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)}\left[d(\Lambda_1^{(0)}-1)\cos(\Lambda_1-1)v - b(\Lambda_1^{(0)}-1)\sin(\Lambda_1-1)v\right],$$

$$a(K) = 4\overline{\Omega}_{yy}\Lambda_k^{(0)} + \psi(\Lambda_k^{(0)2} + \overline{\Omega}_{yy}) + K^2(\psi + \overline{\Omega}_{xx}\Lambda_k^{(0)2}),$$

$$b(K) = \overline{\Omega}_{xy}(4\Lambda_k^{(0)}K + \psi - K^2\Lambda_k^{(0)2}), \quad c(K) = 2\overline{\Omega}_{xy}\Lambda_k^{(0)}K,$$

$$d(K) = 2\left[K(\psi + \overline{\Omega}_{xx}\overline{\Lambda}_k^{(0)2}) + \Lambda_k^{(0)}(\psi + \overline{\Omega}_{yy}K^2)\right],$$

$$\Delta(K) = K^4 + \varphi K^2 + \psi,$$

$$x_{11}^{(2)} = -\frac{p(\Lambda_1^{(0)})}{\Lambda_1^{(0)2}+\overline{\Omega}_{xx}}\cos\Lambda_1 v - \frac{r(\Lambda_1^{(0)})}{\Lambda_1^{(0)2}+\overline{\Omega}_{xx}}\sin\Lambda_1 v +$$

$$+\left[\frac{e(\Lambda_1^{(0)}+2,\ \Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)} - \frac{a(\Lambda_1^{(0)}+2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)}\right]\cos(\Lambda_1+2)v +$$

$$+\left[\frac{g(\Lambda_1^{(0)}+2,\ \Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)} + \frac{2c(\Lambda_1^{(0)}+2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)}\right]\sin(\Lambda_1+2)v +$$

$$+\left[\frac{e(\Lambda_1^{(0)}-2,\ \Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)} - \frac{a(\Lambda_1^{(0)}-2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)}\right]\cos(\Lambda_1-2)v +$$

$$+\left[\frac{g(\Lambda_1^{(0)}-2,\ \Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)} - \frac{2c(\Lambda_1^{(0)}-2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)}\right]\sin(\Lambda_1-2)v,$$

$$x_{12}^{(2)} = -\frac{q(\Lambda_1^{(0)})\,\overline{\Omega}_{xx}}{\Lambda_1^{(0)2}+\overline{\Omega}_{xx}}\cos\Lambda_1 v - \frac{2\Lambda_1^{(0)}q(\Lambda_1^{(0)})}{\Lambda_1^{(0)2}+\overline{\Omega}_{xx}}\sin\Lambda_1 v +$$

$$+\left[\frac{f(\Lambda_1^{(0)}+2,\ \Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)} + \frac{b(\Lambda_1^{(0)}+2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)}\right]\cos(\Lambda_1+2)v +$$

$$+\left[\frac{h(\Lambda_1^{(0)}+2,\ \Lambda_1^{(0)}+1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)} + \frac{d(\Lambda_1^{(0)}+2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}+2)}\right]\sin(\Lambda_1+2)v +$$

$$+\left[\frac{f(\Lambda_1^{(0)}-2,\ \Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)} + \frac{b(\Lambda_1^{(0)}-2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)}\right]\cos(\Lambda_1-2)v +$$

$$+\left[\frac{h(\Lambda_1^{(0)}-2,\ \Lambda_1^{(0)}-1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)} + \frac{d(\Lambda_1^{(0)}-2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)}-2)}\right]\sin(\Lambda_1-2)v,$$

$$x_{13}^{(2)} = -\frac{\Lambda_1^{(0)} r(\Lambda_1^{(0)})}{\Lambda_1^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{xx}} \cos \Lambda_1 v + \frac{\Lambda_1^{(0)} p(\Lambda_1^{(0)}) + (\Lambda_1^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{yy}) q(\Lambda_1^{(0)})}{\Lambda_1^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{xx}} \sin \Lambda_1 v +$$

$$+ \left[\frac{g(\Lambda_1^{(0)} + 2,\ \Lambda_1^{(0)} + 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} + \frac{2c(\Lambda_1^{(0)} + 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} + 2) \cos(\Lambda_1 + 2) v +$$

$$+ \left[-\frac{e(\Lambda_1^{(0)} + 2,\ \Lambda_1^{(0)} + 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} + \frac{a(\Lambda_1^{(0)} + 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} + 2) \sin(\Lambda_1 + 2) v +$$

$$+ \left[\frac{g(\Lambda_1^{(0)} - 2,\ \Lambda_1^{(0)} - 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} - \frac{2c(\Lambda_1^{(0)} - 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} - 2) \cos(\Lambda_1 - 2) v +$$

$$+ \left[-\frac{e(\Lambda_1^{(0)} - 2,\ \Lambda_1^{(0)} - 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} + \frac{a(\Lambda_1^{(0)} - 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} - 2) \sin(\Lambda_1 - 2) v,$$

$$x_{14}^{(2)} = \left[\frac{h(\Lambda_1^{(0)} + 2,\ \Lambda_1^{(0)} + 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} + \frac{d(\Lambda_1^{(0)} + 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} + 2) \cos(\Lambda_1 + 2) v +$$

$$+ \left[-\frac{f(\Lambda_1^{(0)} + 2,\ \Lambda_1^{(0)} + 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} - \frac{b(\Lambda_1^{(0)} + 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} + 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} + 2) \sin(\Lambda_1 + 2) v +$$

$$+ \left[\frac{h(\Lambda_1^{(0)} - 2,\ \Lambda_1^{(0)} - 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} + \frac{d(\Lambda_1^{(0)} - 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} - 2) \cos(\Lambda_1 - 2) v +$$

$$+ \left[-\frac{f(\Lambda_1^{(0)} - 2,\ \Lambda_1^{(0)} - 1)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 1)\,\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} - \frac{b(\Lambda_1^{(0)} - 2)}{\Delta(\Lambda_1^{(0)} - 2)} \right] (\Lambda_1^{(0)} - 2) \sin(\Lambda_1 - 2) v,$$

$$e(L, K) = (\bar{\Omega}_{xx} L^2 + \psi) a(K) - \bar{\Omega}_{xy} L^2 b(K) - 2\bar{\Omega}_{xy} L (\Lambda_k^{(0)} - K) c(K) +$$
$$+ 2\bar{\Omega}_{yy} L\, d(K),$$

$$f(L, K) = \bar{\Omega}_{xy} L^2 a(K) - (\bar{\Omega}_{yy} L^2 + \psi) b(K) + 2\bar{\Omega}_{xx} L (\Lambda_k^{(0)} - K) c(K) -$$
$$- 2\bar{\Omega}_{xy} L\, d(K),$$

$$g(L, K) = 2\bar{\Omega}_{xy} L a(K) - 2\bar{\Omega}_{yy} L b(K) + (\bar{\Omega}_{xx} L^2 + \psi)(\Lambda_k^{(0)} - K) c(K) -$$
$$- \bar{\Omega}_{xy} L^2 d(K),$$

$$h(L, K) = -2\bar{\Omega}_{xx} L a(K) + 2\bar{\Omega}_{xy} L b(K) + \bar{\Omega}_{xy} L^2 (\Lambda_k^{(0)} - K) c(K) -$$
$$- (\bar{\Omega}_{yy} L^2 + \psi) d(K),$$

$$p(\Lambda^{(0)}) = (\Lambda^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{yy}) f_1 - 4\psi \Lambda^{(0)^2} [2\Lambda^{(0)^2} - (\varphi + 3)] - \bar{\Omega}_{xy}^2 [(\varphi + 1)(\varphi + 4) -$$
$$- 6\psi] \Lambda^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{xy}^2 [(\varphi + 1)(\varphi + 4) + 3\psi(\varphi + 3)] +$$
$$+ \bar{\Omega}_{xy}^2 \frac{\Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(0)}} + 2\Lambda^{(0)} \Lambda^{(2)} (\Lambda^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{yy}),$$

$$r(\Lambda^{(0)}) = 2\Lambda^{(0)} \bar{\Omega}_{xy} \Big\{ \psi [2\Lambda^{(0)^2} - (\varphi + 3)] -$$
$$- \Lambda^{(0)^2} [(\varphi + 1)(\varphi + 4) - 6\psi] + [(\varphi + 1)(\varphi + 4) + 3\psi(\varphi + 3)] + \frac{\Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(0)}} \Big\},$$

$$q(\Lambda^{(0)}) = -(\Lambda^{(0)^2} + \bar{\Omega}_{xx}) \frac{\Lambda^{(2)}}{\Lambda^{(0)}}.$$

Нижний индекс у $\Lambda_k^{(0)}$ совпадает с нижним индексом величины $\Lambda^{(0)}$, входящей в аргумент K.

Остальные элементы матрицы $X^{(1)}$ определяются по следующим правилам: если $\Lambda_1^{(0)}$ и Λ_1 заменить соответственно величинами $\Lambda_2^{(0)}$ и Λ_2, то выражения для элементов $x_{11}^{(1)}$, $x_{12}^{(1)}$, $x_{13}^{(1)}$, $x_{14}^{(1)}$ или $x_{21}^{(1)}$, $x_{22}^{(1)}$, $x_{23}^{(1)}$, $x_{24}^{(1)}$ перейдут соответственно в выражения для элементов $x_{31}^{(1)}$, $x_{32}^{(1)}$, $x_{33}^{(1)}$, $x_{34}^{(1)}$ или $x_{41}^{(1)}$, $x_{42}^{(1)}$, $x_{43}^{(1)}$, $x_{44}^{(1)}$; если в выражениях для элементов $x_{11}^{(1)}$, $x_{12}^{(1)}$, $x_{13}^{(1)}$, $x_{14}^{(1)}$ или $x_{31}^{(1)}$, $x_{32}^{(1)}$, $x_{33}^{(1)}$, $x_{34}^{(1)}$ заменить все входящие в них синусы на косинусы с обратным знаком, а косинусы на синусы, то выражения для этих элементов преобразуются соответственно в выражения для элементов $x_{21}^{(1)}$, $x_{22}^{(1)}$, $x_{23}^{(1)}$, $x_{24}^{(1)}$ или $x_{41}^{(1)}$, $x_{42}^{(1)}$, $x_{43}^{(1)}$, $x_{44}^{(1)}$. Точно такими же свойствами обладают элементы матрицы $X^{(2)}$.

В заключение этого параграфа заметим, что полученное решение пригодно также для исследования движения малой массы вблизи второго треугольного решения L_5. Для этого во всех предыдущих формулах знак перед величиной Ω_{xy} следует изменить на обратный.

§ 4. Вычисление траекторий движения для системы Земля—Луна. Сравнение с результатами численного интегрирования

В этом параграфе приведены результаты расчетов траекторий движения малой массы вблизи треугольной точки L_4 системы Земля—Луна. Эксцентриситет орбиты Луны и отношение массы Земли к массе Луны принимались равными [3]:

$$e = 0{,}054900489, \quad 1:m = 81{,}53.$$

Тогда корни определяющего уравнения получаются чисто мнимыми, а величины $\Lambda_1^{(0)}$ и $\Lambda_2^{(0)}$ имеют значения:

$$\Lambda_1^{(0)} = 0{,}2991, \quad \Lambda_2^{(0)} = 0{,}9518.$$

Условия (4) выполняются.

Элементы матриц $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ при этих исходных данных оказываются равными:

$$x_{11}^{(0)} = 2{,}3428 \cos \Lambda_1 v, \quad x_{12}^{(0)} = -1{,}2695 \cos \Lambda_1 v - 0{,}5982 \sin \Lambda_1 v,$$

$$x_{13}^{(0)} = -0{,}7007 \sin \Lambda_1 v, \quad x_{14}^{(0)} = -0{,}1789 \cos \Lambda_1 v + 0{,}3797 \sin \Lambda_1 v,$$

$$x_{31}^{(0)} = 3{,}1594 \cos \Lambda_2 v, \quad x_{32}^{(0)} = -1{,}2695 \cos \Lambda_2 v - 1{,}9037 \sin \Lambda_2 v,$$

$$x_{33}^{(0)} = -3{,}0073 \sin \Lambda_2 v, \quad x_{34}^{(0)} = -1{,}8120 \cos \Lambda_2 v + 1{,}2083 \sin \Lambda_2 v,$$

$$x_{11}^{(1)} = -3{,}1559 \cos (\Lambda_1 + 1) v + 0{,}7897 \sin (\Lambda_1 + 1) v -$$
$$- 9{,}7616 \cos (\Lambda_1 - 1) v - 3{,}1936 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{12}^{(1)} = 1{,}5084 \cos (\Lambda_1 + 1) v + 2{,}1682 \sin (\Lambda_1 + 1) v +$$
$$+ 6{,}1047 \cos (\Lambda_1 - 1) v - 3{,}0175 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{13}^{(1)} = 1{,}0259 \cos (\Lambda_1 + 1) v + 4{,}0998 \sin (\Lambda_1 + 1) v +$$
$$+ 2{,}2385 \cos (\Lambda_1 - 1) v - 6{,}8421 \sin (\Lambda_1 - 1) v,$$

$$x_{14}^{(1)} = 2{,}8167 \cos(\Lambda_1 + 1)v - 1{,}9595 \sin(\Lambda_1 + 1)v +$$
$$+ 2{,}1150 \cos(\Lambda_1 - 1)v + 4{,}2789 \sin(\Lambda_1 - 1)v,$$
$$x_{31}^{(1)} = -1{,}8425 \cos(\Lambda_2 + 1)v + 0{,}4367 \sin(\Lambda_2 + 1)v +$$
$$+ 1{,}9722 \cos(\Lambda_2 - 1)v + 1{,}4778 \sin(\Lambda_2 - 1)v,$$
$$x_{32}^{(1)} = 0{,}4772 \cos(\Lambda_2 + 1)v + 1{,}8024 \sin(\Lambda_2 + 1)v -$$
$$- 1{,}6829 \cos(\Lambda_2 - 1)v + 1{,}1543 \sin(\Lambda_2 - 1)v,$$
$$x_{33}^{(1)} = 0{,}8523 \cos(\Lambda_2 + 1)v + 3{,}5962 \sin(\Lambda_2 + 1)v -$$
$$- 0{,}0711 \cos(\Lambda_2 - 1)v + 0{,}0950 \sin(\Lambda_2 - 1)v,$$
$$x_{34}^{(1)} = 3{,}5180 \cos(\Lambda_2 + 1)v - 0{,}9314 \sin(\Lambda_2 + 1)v -$$
$$- 0{,}0556 \cos(\Lambda_2 - 1)v - 0{,}0810 \sin(\Lambda_2 - 1)v,$$
$$x_{11}^{(2)} = 0{,}9923 \cos(\Lambda_1 + 2)v - 0{,}5041 \sin(\Lambda_1 + 2)v + 7{,}2544 \cos(\Lambda_1 - 2)v +$$
$$+ 4{,}5712 \sin(\Lambda_1 - 2)v - 13{,}5317 \cos\Lambda_1 v - 5{,}4121 \sin\Lambda_1 v,$$
$$x_{12}^{(2)} = -0{,}4091 \cos(\Lambda_1 + 2)v - 1{,}1229 \sin(\Lambda_1 + 2)v - 5{,}0971 \cos(\Lambda_1 - 2)v +$$
$$+ 6{,}0362 \sin(\Lambda_1 - 2)v + 4{,}2066 \cos\Lambda_1 v + 3{,}3471 \sin\Lambda_1 v,$$
$$x_{13}^{(2)} = -1{,}1589 \cos(\Lambda_1 + 2)v - 2{,}2812 \sin(\Lambda_1 + 2)v - 7{,}7764 \cos(\Lambda_1 - 2)v +$$
$$+ 12{,}3410 \sin(\Lambda_1 - 2)v - 1{,}6173 \cos\Lambda_1 v - 9{,}0764 \sin\Lambda_1 v,$$
$$x_{14}^{(2)} = -2{,}5814 \cos(\Lambda_1 + 2)v + 0{,}9405 \sin(\Lambda_1 + 2)v -$$
$$- 10{,}2686 \cos(\Lambda_1 - 2)v - 8{,}6711 \sin(\Lambda_1 - 2)v,$$
$$x_{31}^{(2)} = 0{,}0291 \cos(\Lambda_2 + 2)v - 0{,}0163 \sin(\Lambda_2 + 2)v - 4{,}7606 \cos(\Lambda_2 - 2)v -$$
$$- 3{,}0053 \sin(\Lambda_2 - 2)v - 17{,}2378 \cos\Lambda_2 v - 7{,}1292 \sin\Lambda_2 v,$$
$$x_{32}^{(2)} = -0{,}0018 \cos(\Lambda_2 + 2)v - 0{,}0434 \sin(\Lambda_2 + 2)v + 3{,}7239 \cos(\Lambda_2 - 2)v -$$
$$- 1{,}8959 \sin(\Lambda_2 - 2)v + 2{,}9867 \cos\Lambda_2 v + 7{,}5703 \sin\Lambda_2 v,$$
$$x_{33}^{(2)} = -0{,}0482 \cos(\Lambda_2 + 2)v - 0{,}0859 \sin(\Lambda_2 + 2)v + 3{,}1498 \cos(\Lambda_2 - 2)v -$$
$$- 4{,}9895 \sin(\Lambda_2 - 2)v - 6{,}7865 \cos\Lambda_2 v + 3{,}8458 \sin\Lambda_2 v,$$
$$x_{34}^{(2)} = -0{,}1282 \cos(\Lambda_2 + 2)v + 0{,}0054 \sin(\Lambda_2 + 2)v +$$
$$+ 1{,}9871 \cos(\Lambda_2 - 2)v + 3{,}9029 \sin(\Lambda_2 - 2)v,$$

где Λ_1 и Λ_2 — частоты долгопериодического и короткопериодического движений.

$$\Lambda_1 = \Lambda_1^{(0)} + \varepsilon^2 \Lambda_1^{(2)} = 0{,}3003, \quad \Lambda_2 = \Lambda_2^{(0)} + \varepsilon^2 \Lambda_2^{(2)} = 0{,}9547.$$

Невыписанные элементы матриц фундаментальной системы решений определяются по правилу, указанному в предыдущем параграфе.

По полученной фундаментальной матрице решений были проведены расчеты траекторий движения малой массы для нижеследующих вариантов начальных условий (при $v=0$).

Вариант 1: $x_1 = 0{,}0001,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,$

вариант 2: $x_1 = 0{,}001,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,$

вариант 3: $x_1 = 0{,}01,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,$

вариант 4: $x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}0001,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,$

вариант 5: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0{,}0001,\ x_4 = 0,$

вариант 6: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0{,}0001.$

Результаты расчетов приведены на рис. 1—6 и в таблицах. Там же приведены результаты расчетов этих же вариантов путем численного интегрирования полной системы дифференциальных уравнений (1) методом Рунге—Кутта с переменным шагом на электронной вычислительной машине.

вариант 1

k	$x_1 \cdot 10^3$	$x_2 \cdot 10^3$	$[x_1^{(0)} + \varepsilon x_1^{(1)}]\, 10^3$	$[x_2^{(0)} + \varepsilon x_2^{(1)}]\, 10^3$	$(x_1)_r \cdot 10^3$	$(x_2)_r \cdot 10^3$
1	+1,2450	—1,0321	+1,2479	—1,0336	+1,2105	—1,0098
2	—0,9197	+0,1156	—0,9196	+0,1124	—0,9148	+0,1190
3	—0,4846	+0,3590	—0,4844	+0,3610	—0,4668	+0,3470
4	+1,6353	—0,9694	+1,6392	—0,9691	+1,6036	—0,9556
5	+0,0792	—0,3697	+0,0811	—0,3736	+0,0577	—0,3539
6	—0,9347	+0,6571	—0,9349	+0,6574	—0,9072	+0,6392
7	+1,3317	—0,4653	+1,3346	—0,4632	+1,3202	—0,4672
8	+0,9583	—0,6499	+0,9609	—0,6528	+0,9187	—0,6294
9	—1,1290	+0,7567	—1,1303	+0,7554	—1,1081	+0,7442
10	+0,4207	+0,2492	+0,4211	+0,2524	+0,4379	+0,2311
11	+1,3782	—0,6700	+1,3800	—0,6706	+1,3386	—0,6554
21	+1,0517	—0,9162	+1,0535	—0,9170	+1,0096	—0,8943
31	+1,5277	—0,8063	+1,5306	—0,8069	+1,4676	—0,7824
41	+0,9300	—0,7683	+0,9311	—0,7682	+0,8750	—0,7475
51	+1,5807	—0,9489	+1,5844	—0,9496	+1,5050	—0,9161
61	+0,9202	—0,6399	+0,9210	—0,6392	+0,8444	—0,6175
71	+1,5157	—1,0472	+1,5198	—1,0480	+1,4300	—1,0090
81	+1,0229	—0,5758	+1,0240	—0,5746	+0,9198	—0,5459
91	+1,3528	—1,0665	+1,3569	—1,0671	+1,2594	—1,0269
100	+0,3588	+0,2962	+0,3604	+0,2984	+0,4923	+0,2054

вариант 2

k	$x_1 \cdot 10^2$	$x_2 \cdot 10^2$	$x_1^{(0)} \cdot 10^2$	$x_2^{(0)} \cdot 10^2$	$(x_1)_r \cdot 10^2$	$(x_2)_r \cdot 10^2$
1	+1,2450	—1,0321	+1,0927	—0,9337	+1,2019	—1,0215
2	—0,9197	+0,1156	—0,8040	+0,3245	—0,9447	+0,1380
3	—0,4846	+0,3590	—0,3669	+0,3297	—0,4649	+0,3477
4	+1,6353	—0,9694	+1,4636	—0,8553	+1,6126	—0,9767
5	+0,0792	—0,3697	+0,0828	—0,4042	+0,0929	—0,3206
6	—0,9347	+0,6571	—0,7530	+0,5647	—0,9055	+0,6391
7	+1,3317	—0,4653	+1,2240	—0,3798	+1,3333	—0,4797
8	+0,9583	—0,6499	+0,8471	—0,6227	+0,8686	—0,6038
9	—1,1290	+0,7567	—0,9536	+0,6370	—1,1237	+0,7528
10	+0,4207	+0,2492	+0,4174	+0,2750	+0,4460	+0,2305

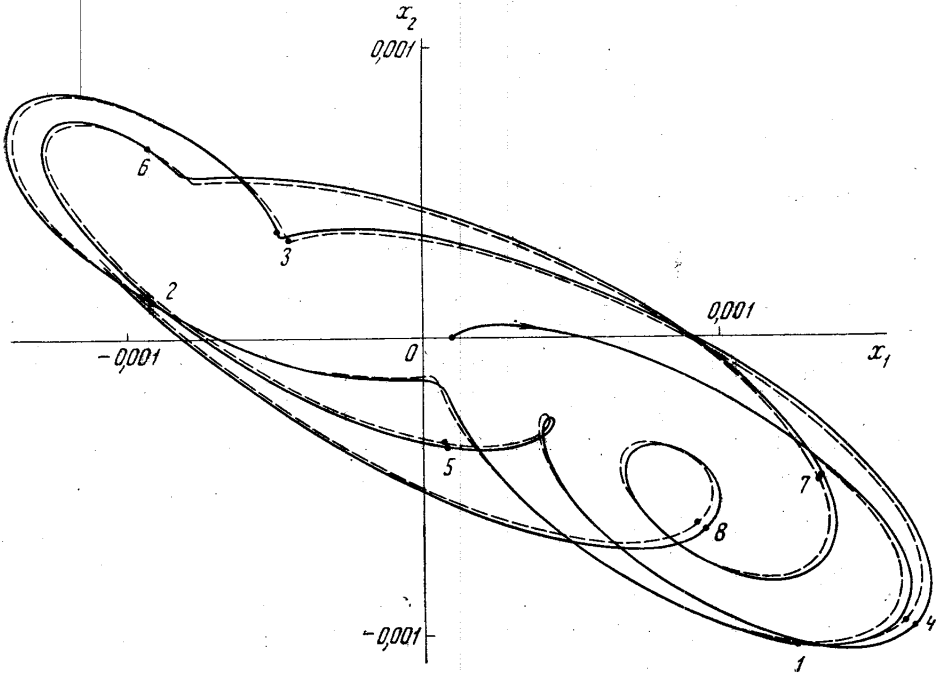

Рис. 1. Траектория движения для варианта 1 начальных условий. Прямая — траектория, полученная по аналитическому решению, пунктирная — траектория, полученная путем численного интегрирования. Цифры вдоль траекторий обозначают число оборотов Луны вокруг Земли. Начало координат находится в точке L_4

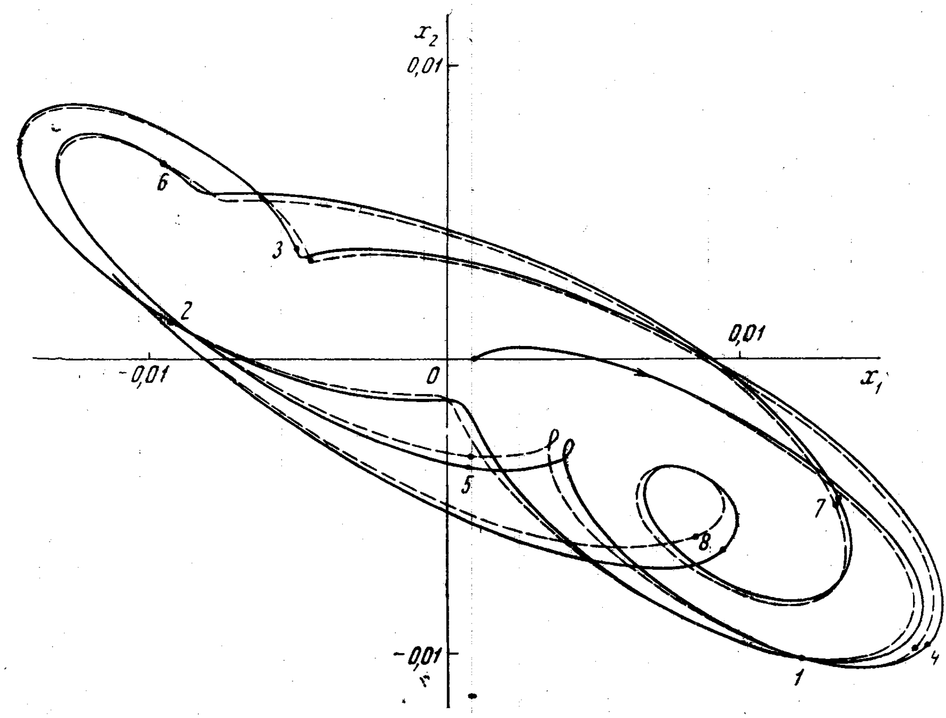

Рис. 2. Траектория движения для варианта 2 начальных условий. Обозначения те же, что на рис. 1

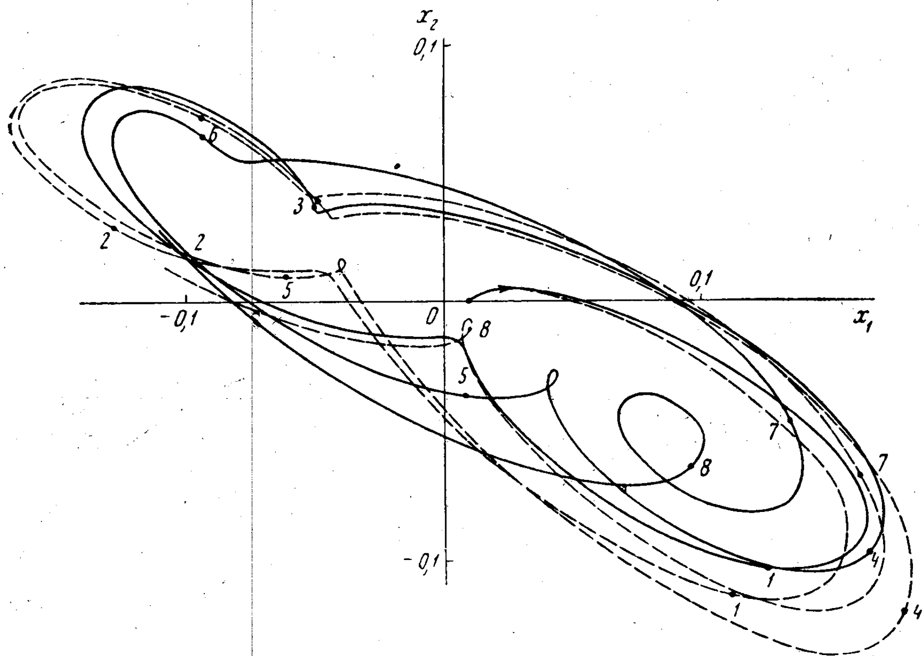

Рис. 3. Траектория движения для варианта 3 начальных условий. Обозначения те же, что на рис. 1

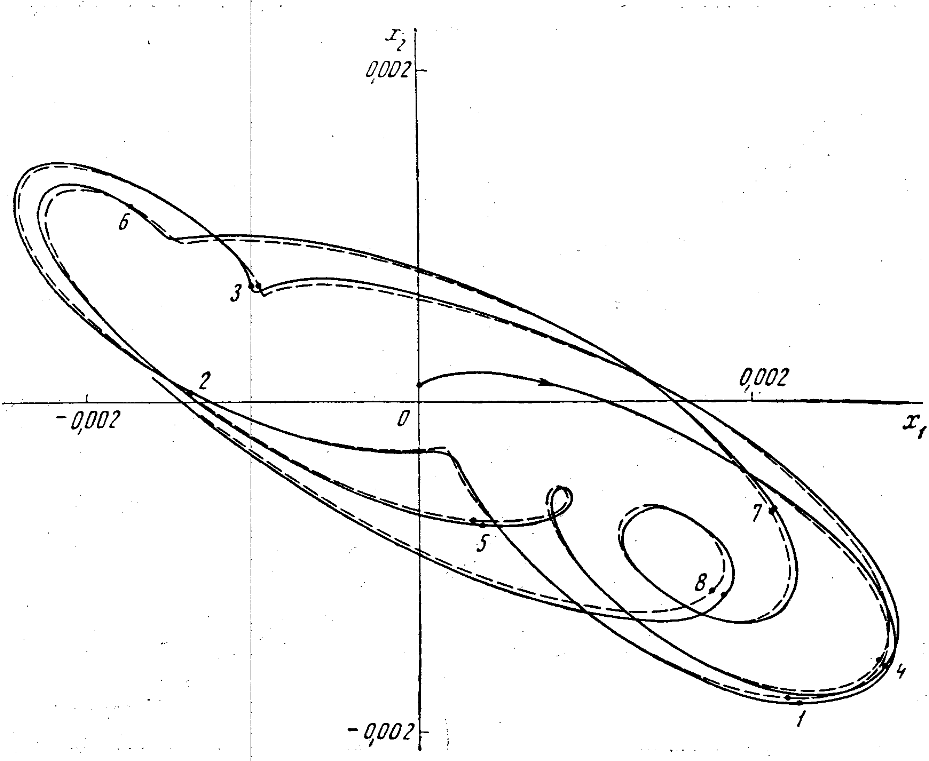

Рис. 4. Траектория движения для варианта 4 начальных условий. Обозначения те же, что на рис. 1

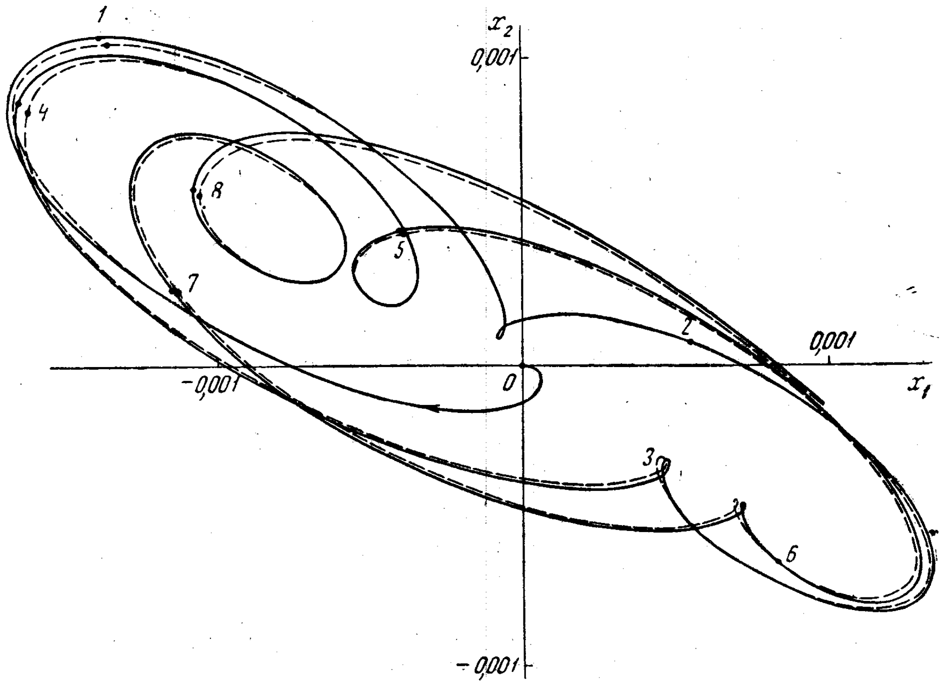

Рис. 5. Траектория движения для варианта 5 начальных условий. Обозначения те же, что и на рис. 1

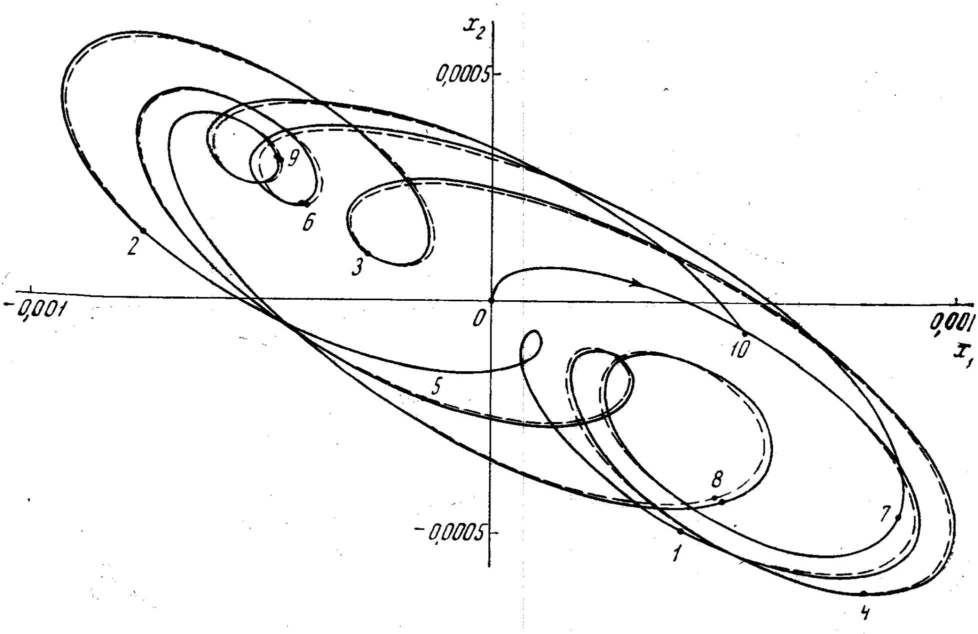

Рис. 6. Траектория движения для варианта 6 начальных условий. Обозначения те же, что на рис. 1

вариант 3

k	$x_1 \cdot 10$	$x_2 \cdot 10$	$(x_1)_r \cdot 10$	$(x_2)_r \cdot 10$
1	+1,2450	—1,0321	+1,1013	—1,1341
2	—0,9197	+0,1156	—1,2943	+0,3022
3	—0,4846	+0,3590	—0,4838	+0,3887
4	+1,6353	—0,9694	+1,7620	—1,2928
5	+0,0792	—0,3697	—0,6119	+0,1091
6	—0,9347	+0,6571	—0,9289	+0,7266
7	+1,3317	—0,4653	—1,6034	—0,6703
8	+0,9583	—0,6499	+0,1009	—0,1085
9	—1,1290	+0,7567	—1,3493	+0,9102
10	+0,4207	—0,2492	+0,6089	+0,1970

вариант 4

k	$x_1 \cdot 10^3$	$x_2 \cdot 10^3$	$(x_1)_r \cdot 10^3$	$(x_2)_r \cdot 10^3$
1	+2,3188	—1,8352	+2,2594	—1,7995
2	—1,3941	+0,0703	—1,3921	+0,0801
3	—0,9987	+0,7135	—0,9678	+0,6927
4	+2,8483	—1,6162	+2,7967	—1,5962
5	+0,3832	—0,7545	+0,3379	—0,7225
6	—1,7176	+1,1879	+1,6719	+1,1577
7	+2,1583	—0,6586	+2,1422	—0,6641
8	+1,8514	—1,1857	+1,7773	—1,1485
9	—1,9604	+1,2918	—1,9308	+1,2735
10	+0,4725	+0,5978	+0,5043	+0,5665

вариант 5

k	$x_1 \cdot 10^3$	$x_2 \cdot 10^3$	$(x_1)_r \cdot 10^3$	$(x_2)_r \cdot 10^3$
1	—1,3636	+1,0638	—1,3348	+1,0415
2	+0,5495	+0,0847	+0,5394	+0,0860
3	+0,4633	—0,3571	+0,4483	—0,3397
4	—1,6170	+0,8596	—1,5884	+0,8438
5	—0,4009	+0,4486	—0,3911	+0,4415
6	+0,8437	—0,6542	+0,8212	—0,6391
7	—1,1438	+0,2534	—1,1323	+0,2534
8	—1,0769	+0,5844	—1,0513	+0,5710
9	+1,0256	—0,7451	+1,0066	—0,7331
10	—0,1235	—0,4596	—0,1371	—0,4435

вариант 6

k	$x_1 \cdot 10^3$	$x_2 \cdot 10^3$	$(x_1)_r \cdot 10^3$	$(x_2)_r \cdot 10^3$
1	+0,4111	—0,4950	+0,3939	—0,4842
2	—0,7617	+0,1425	—0,7595	+0,1437
3	—0,2698	+0,0992	—0,2605	+0,0930
4	+0,8019	—0,6306	+0,7869	—0,6242
5	—0,1399	—0,2202	—0,1492	—0,2134
6	—0,4219	+0,2117	—0,4075	+0,2025
7	+0,8777	—0,4653	+0,8737	—0,4670
8	+0,5001	—0,4330	+0,4817	—0,4229
9	—0,4705	+0,3101	—0,4579	+0,3039
10	+0,5456	—0,0624	+0,5563	—0,0717

Обозначения в таблицах: k — число оборотов тел конечной массы (число лунных месяцев), x_1, x_2 — координаты малой массы, полученные по формулам § 3 с точностью до ε^2 включительно, $x_1^{(0)} + \varepsilon x_1^{(1)}$, $x_2^{(0)} + \varepsilon x_2^{(1)}$ — те же координаты, но с точностью до ε^1 включительно, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ — те же координаты, но с точностью до ε^0 включительно, $(x_1)_r$, $(x_2)_r$ — координаты малой массы, полученные путем численного интегрирования

Наибольшее отклонение аналитических решений от численных за десять лунных месяцев составляет $\sim 5\%$ для всех рассмотренных вариантов, кроме варианта 3, для которого отклонение достигает $\sim 30\%$ и более. Это указывает на то, что для достаточно больших начальных условий при построении аналитических решений следует учитывать нелинейные члены.

Для виранта 1 проведено сравнение аналитических решений с результатами численного интегрирования на интервале времени $\sim 7{,}5$ лет (100 лунных месяцев). Это сравнение показывает (см. таблицу), что с увеличением интервала времени отклонения между аналитическими решениями и решениями, полученными путем численного интегрирования, увеличиваются, однако качественное поведение траекторий, а также максимальные расстояния до точки L_4 хорошо совпадают.

Кроме того, видно, что при проведении вычислений по полученным формулам в системе Земля—Луна можно ограничиться первым приближением, т. е. $x \approx x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)}$. Это очень сильно упрощает формулы для расчетов, а отличие от решения с учетом членов второго порядка незначительно (в третьем знаке).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
3. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
26. 6 1967 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии