Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1968

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Г. Н. МЕДВЕДЕВ, Б. И. МОРГУНОВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

УДК 517.925

Постановка задачи. Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X[x, x(t-\Delta), \psi, \psi(t-\Delta), \varepsilon], \\ \dot{\psi} &= \omega(x) + \varepsilon\Psi[x, x(t-\Delta), \psi, \psi(t-\Delta), \varepsilon]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь X — n-мерная векторная функция, ψ — скалярная функция («вращающаяся фаза»), $\varepsilon>0$ — малый параметр, Δ (запаздывание) — ограниченная неотрицательная величина, которая может зависеть от t и от неизвестных функций x и ψ.

Для систем вида (1), не содержащих запаздывания, метод усреднения разрабатывался в работах [1—3].

В работах [4, 5] метод усреднения был применен к системам вида (1) с постоянным запаздыванием ($\Delta \equiv \text{const}$).

В настоящей заметке рассматриваются системы (1) с переменным запаздыванием ($\Delta \equiv \Delta(x, \psi, t)$). Сообщаются результаты разработки и обоснования несколько видоизмененной по сравнению с [4, 5] схемы построения приближенных решений (1) с помощью метода усреднения (в любом приближении относительно параметра ε).

Рассмотрим замену переменных следующего вида:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon u_1(\xi, \varphi, \varphi(t_1)) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \varphi, \varphi(t_1), \varphi(t_2)) + \varepsilon^3 \ldots \\ \psi &= \varphi + \varepsilon v_1(\xi, \varphi, \varphi(t_1)) + \varepsilon^2 v_2(\xi, \varphi, \varphi(t_1)\,\varphi(t_2)) + \varepsilon^3 \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

риводящую к системе

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon \overline{X}_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \ldots \\ \dot{\varphi} &= \omega(\xi) + \varepsilon B_1(\xi) + \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $t_1 \equiv t - \Delta(\xi, \varphi)$, $t_2 = t - \Delta(\xi, \varphi) - \Delta(\xi, \varphi(t - \Delta(\xi, \varphi)))$, $\ldots$, $X_1 \equiv X|_{\varepsilon=0}$

$$\overline{X}_1(\xi) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} X_1[\xi, \xi, \omega(\xi)(t-t_0)+\varphi_0, \omega(\xi)(t-t_0- \\ - \Delta(\xi, \omega(\xi)(t-t_0)+\varphi_0)) + \varphi_0]\,dt. \tag{4}$$

Остальные коэффициенты системы (3) также представляют собой средние значения вида (4) от известных функций правых частей системы (1).

Ограничиваясь в правых частях (3) членами порядка ε^n, мы получаем так называемую усредненную систему n-го приближения. Например, усредненная система первого приближения имеет вид:

$$\dot{\xi} = \varepsilon \overline{X}_1 (\xi). \tag{5}$$

Решение систем высших приближений ищем в виде $\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \ldots$. Если известно решение (5), то величины ξ_i $(i \geqslant 1)$ определяются с помощью квадратур.

Точное решение системы (1) сравнивается с асимптотическим на интервале времени порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

Основные результаты. Для доказательства теоремы о первом приближении потребуем существования пределов — средних значений вида (4), равномерных по ξ, t_0 и ψ_0 в некоторой области и не зависящих от ψ_0. Предполагается также, что существуют единственные решения системы (1) и усредненной системы первого приближения.

При выполнении этих, а также некоторых других требований, касающихся гладкости рассматриваемых функций, равномерно в промежутке $\left[t_0;\ t_0 + \frac{L}{\varepsilon}\right]$, где L — произвольное фиксированное число, имеют место оценки: $|x - \xi| = o(1)$, если (x, ψ) — решение системы (1), а ξ — решение системы (5).

Во втором приближении при выполнении дополнительных требований существования средних значений вида (4) от ряда известных функций правых частей системы (1), а также условий, обеспечивающих их достаточную гладкость, равномерно в промежутке $\left[t_0;\ t_0 + \frac{L}{\varepsilon}\right]$ выполняются оценки: $|x - \xi - \varepsilon u_1| = o(\varepsilon)$; $|\psi - \varphi| = o(1)$, где (x, ψ)—решение (1), u_1 — некоторая известная ограниченная функция (см. формулы (2)), а (ξ, φ) — решение усредненной системы второго приближения.

Высшие приближения рассматриваются аналогично.

Сходные результаты получены также для систем нейтрального типа, отличающихся от (1) тем, что правые части их зависят кроме указанных аргументов еще от $\left.\frac{dx(z)}{dz}\right|_{z=t-\Delta}$.

В заключение рассмотрим два примера.

Пример 1. Уравнение второго порядка

$$\ddot{y} + k^2(x)\, y = -2\varepsilon\lambda(x)\, \dot{y}(t - \Delta),$$

где $x = \varepsilon t$, $\Delta \equiv \text{const}$
путем введения новых переменных F и ψ по формулам

$$y = F \cos\psi,$$
$$\frac{dy}{dt} = -Fk(x) \sin\psi \tag{6}$$

сводится к системе вида (1)

$$\dot{F} = -\varepsilon 2\lambda F(t - \Delta)\, \frac{k[x(t-\Delta)]}{k(x)} \sin\psi(t - \Delta) \sin\psi - \varepsilon \frac{F}{k(x)} \frac{dk}{dx} \sin^2\psi,$$

$$\dot{x} = \varepsilon,$$

$$\dot{\psi} = k(x) - 2\varepsilon\lambda \frac{F(t-\Delta)}{F} \frac{k[x(t-\Delta)]}{k(x)} \sin\psi(t - \Delta)\cos\psi - \varepsilon \frac{1}{k(x)} \frac{dk}{dx} \sin\psi\cos\psi.$$

Усредненная система первого приближения имеет вид

$$\dot{\xi} = \varepsilon \left\{-\lambda(\varepsilon t)\, \xi \cdot \cos[\Delta \cdot k(\varepsilon t)] - \frac{\xi}{2} \frac{1}{k(\varepsilon t)} \frac{dk(\varepsilon t)}{d(\varepsilon t)}\right\}.$$

Отсюда находим первое приближение для амплитуды

$$F_1(\varepsilon t) = F_{10} \sqrt{\frac{k(0)}{k(\varepsilon t)}} \exp\left\{-\int\limits_0^{\varepsilon t} \lambda(\eta) \cos[\Delta \cdot k(\eta)]\, d\eta\right\}. \tag{7}$$

При $\Delta=0$ это выражение переходит в известную формулу первого приближения амплитуды для уравнения, не содержащего запаздывания.

Усредненная система второго приближения, вычисленная по схеме [5], имеет вид

$$\dot{\xi}=\varepsilon\left\{-\lambda\xi\cos(\Delta\cdot k)-\frac{\xi}{2}\cdot\frac{1}{k}\frac{dk}{d(\varepsilon t)}\right\}+\varepsilon^2\xi\cdot\gamma(\varepsilon t),$$

где $\gamma(\varepsilon t)\equiv\gamma(\Delta,\lambda,k)$; $\dot{\varphi}=k(\varepsilon t)+\varepsilon\lambda\cdot\sin[\Delta\cdot k(\varepsilon t)]$.

Полагая $\xi=\xi_0+\varepsilon\xi_1$, где ξ_0 определяется формулой (7), находим второе усредненное приближение для амплитуды и первое приближение для фазы:

$$F_2=F_{10}\sqrt{\frac{k(0)}{k(\varepsilon t)}}\exp\left\{-\int_0^{\varepsilon t}\lambda\cos k\Delta d\eta\right\}+\varepsilon\exp\left\{-\int_0^{\varepsilon t}\lambda\cos k\Delta d\eta\right\}\times$$

$$\times\left[F_{20}+\int_0^{\varepsilon t}F_1(\eta)\gamma(\eta)\exp\left\{\int_0^{\eta}\lambda\cos k\Delta d\sigma\right\}\sqrt{\frac{k(0)}{k(\eta)}}\,d\eta\right]\sqrt{\frac{k(0)}{k(\varepsilon t)}},$$

$$\varphi_1=\psi_0+\int_0^t k(\eta)\,d\eta+\varepsilon\int_0^t\lambda(\eta)\sin\Delta\cdot k(\eta)\,d\eta.$$

Пример 2. Уравнение второго порядка

$$\ddot{y}+\omega_0^2y=\varepsilon\left[\alpha\left(1-\beta y^2(t-\Delta)\right)\dot{y}(t-\Delta)-2\lambda\dot{y}\right],$$

где $\Delta\equiv\mathrm{const}$, $\omega_0\equiv\mathrm{const}$ заменой переменных (8) сводится к системе вида (1):

$$\dot{F}=-\varepsilon\sin\psi\left[\alpha\left(1-\beta F^2(t-\Delta)\cos^2\psi(t-\Delta)\right)\left(-F(t-\Delta)\sin\psi(t-\Delta)\right)+2\lambda F\sin\psi\right],$$

$$\dot{\psi}=\omega_0-\varepsilon\frac{\cos\psi}{F}\left[\alpha\left(1-\beta F^2(t-\Delta)\cos^2\psi(t-\Delta)\right)\left(-F(t-\Delta)\sin\psi(t-\Delta)\right)+2\lambda F\sin\psi\right].$$

Усредненное уравнение первого приближения для амплитуды имеет вид

$$\dot{\xi}=\varepsilon\left\{\left(\frac{\alpha\cos\omega_0\Delta}{2}-\lambda\right)\xi-\frac{\alpha\beta\cos\omega_0\Delta}{8}\xi^3\right\}$$

(уравнение Бернулли). Отсюда находим первое приближение для амплитуды:

$$F_1(\varepsilon t)=\left[\left(\frac{1}{F_{10}^2}-\frac{g}{f}\right)e^{-2\varepsilon f(t-\Delta)}+\frac{g}{f}\right]^{-1/2},$$

где $f=\dfrac{\alpha\cos\omega_0\Delta}{2}-\lambda$; $g=\dfrac{\alpha\beta\cos\omega_0\Delta}{8}$.

Для фазы φ имеем следующее усредненное уравнение первого приближения:

$$\dot{\varphi}=\omega_0-\varepsilon\left\{\frac{\alpha}{2}\sin(\Delta\omega_0)-\alpha\beta\frac{\sin(\Delta\omega_0)}{8}\xi^2\right\}.$$

Отметим, что в случае $\omega_0\equiv\mathrm{const}$ x и ψ определяются с одинаковой степенью точности, так как для определения ψ в первом приближении достаточно подставить первое приближение x в члены порядка ε.

В заключение приносим благодарность В. М. Волосову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М. Диссертация. Киев, Ин-т механики АН УССР, 1961.
2. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», **17**, вып. 6(108), 1962.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1955.

4. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1965.
5. Медведев Г. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1966.

Поступила в редакцию
24. 4 1967 г.

Кафедра
математики

УДК 530.145 : 539.12.01

В. Б. ГОСТЕВ, В. А. САНЬКО

ОДНОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В последнее время в ряде работ (см., например [1]) был детально исследован V—θ-сектор модели Ли [2—4]. Удалось найти точное решение [5] и для модели Ли, в V—θ-сектор которой добавлена тяжелая частица [7].

В настоящей статье рассматривается обобщение модели Ли в двух направлениях: добавляется третья тяжелая частица и скалярное взаимодействие заменяется псевдоскалярным (введением спина фиксированных фермионов) [8, 9]. Эти усложнения делают модель более реалистичной. В частности, они дают возможность рассматривать некоторые особенности рассеяния K-мезонов на нуклонах [9], а также выявляют ряд новых черт рассеяния легких частиц на фиксированном источнике (угловое распределение).

Точное решение интегральных уравнений для волновых функций состояний дискретного спектра и рассеяния, к сожалению, не найдено, несмотря на то, что оно существует для подобной модели со скалярным взаимодействием [5, 6]. Однако все качественные характеристики модели удается проследить путем приближенного решения этих уравнений методом замены ядер вырожденными [10]. Метод дает возможность исследовать те особенности модели, которые теория возмущения (ряд Неймана) не обнаруживает. Решения, найденные таким методом для трехчастичной модели со скалярным взаимодействием [11], очень близки к точным [6].

Гамильтониан системы бесспиновых бозонов θ, взаимодействующих с фиксированными фермионами A, B, C со спином 1/2 возьмем в виде

$$H = m_{0A}A^+A + m_{0B}B^+B + m_c C^+C + \int d\vec{k}\,\omega(k)\,d^+(\vec{k})\,d(\vec{k}) +$$
$$+ \lambda_{01}\left[\int d\vec{k}u_k\,A^+\vec{\sigma}\vec{k}\,Bd(\vec{k}) + \text{э. с.}\right] + \lambda_{02}\left[\int d\vec{k}u_k\,B^+\vec{\sigma}\vec{k}\,Cd(\vec{k}) + \text{э. с.}\right], \quad (1)$$

где $A = a_\alpha A_\alpha$, $B = b_\alpha B_\alpha$, $C = c_\alpha C_\alpha$ (здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование), $A_\alpha(A_\alpha^+)$, $B_\alpha(B_\alpha^+)$, $C_\alpha(C_\alpha^+)$ и $d(\vec{k})$ $(d^+(\vec{k}))$ — операторы уничтожения (рождения) A, B, C частиц со спином α ($\alpha = \pm 1/2$) и θ-частиц с импульсом $\vec{k}$; a_α, b_α, c_α — постоянные единичные спиноры; σ_i — матрицы Паули (σ_3 — диагональна); $u(\omega_k)$ — формфактор, обеспечивающий сходимость всех встречающихся интегралов $\left(u_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\right.$ для точечного $\left.\text{источника}\right)$, $\omega = \sqrt{k^2+1}$, $k^2 = \vec{k}\vec{k}$, θ— частица имеет единичную массу $\hbar = c = 1$.

Одночастичные $|A)$-состояния — дискретные нормированные собственные состояния гамильтониана (1) с энергией m_A, переходящие при выключении взаимодействий λ_{01}, λ_{02} в $A_\alpha^+|0>$ ($|0>$ — вакуум), ищем в виде

$$|A_\alpha) = Z_A^{1/2}\Big[\delta_{\alpha\beta}A_\beta^+ + \int d\vec{k}\,\psi_{\beta\alpha}(\vec{k})\,B_\beta^+\,d^+(\vec{k}) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\int d\vec{k}\,d\vec{l}\,\chi_{\beta\alpha}(k, l)\,C_\beta^+\,d^+(\vec{k})\,d^+(\vec{l})\Big]\Big|0>. \quad (2)$$

После перенормировок массы B-частицы и константы связи λ_{02}, аналогичных перенормировкам в модели Ли [4, 9], с помощью уравнения Шредингера находим интегральное уравнение для волновой функции $\psi_{\beta\alpha}$