

А. М. ГРИГОРЬЕВ, Ю. В. ЛИСАКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В связи с появлением оптимальных и самонастраивающихся систем повысился интерес к исследованию поведения системы при вариации ее параметров. В теории автоматического управления появилась самостоятельная область — теория чувствительности [1], которая занимается исследованием изменений свойств систем при малых вариациях параметров.

Наряду с оценками чувствительности во временной области, основанными на решении дифференциальных уравнений с отклоняющимися параметрами [2], существуют оценки чувствительности, связанные с методами анализа и синтеза систем автоматического управления в плоскости комплексного переменного [3, 4, 5]. Одним из таких методов является метод траекторий корней [6], который позволяет определить траектории корней характеристического уравнения на комплексной плоскости при изменении в любых пределах параметра, линейно входящего в некоторые коэффициенты уравнения. Следовательно, этот метод дает возможность проследить закономерности смещения корней на любом участке траектории при малых изменениях параметра.

Ниже предлагается метод оценки чувствительности, связанный с определением величины такого смещения. Подобный подход к вопросу чувствительности раскрывает дополнительные возможности метода траекторий корней и не встречался авторами в отечественной и зарубежной литературе.

На рис. 1 изображен отрезок траектории MN заданной системы, не содержащий кратных точек. Точка A соответствует положению корня в исходной системе при значении параметра траектории α . Если параметр получит приращение $\Delta\alpha$, то корень переместится по траектории в точку B . Хорда AB может быть выражена через приращение координат

$$(AB)^2 = (\Delta\delta)^2 + (\Delta\omega)^2. \quad (1)$$

Если вариация $\Delta\alpha$ мала, то участок траектории AOB тоже мал, и его можно аппроксимировать прямой AB . Отсюда в пределе получим

$$(dl)^2 = (d\delta)^2 + (d\omega)^2, \quad (2)$$

где dl — смещение корня вдоль траектории.

Деля левую и правую части равенства (2) на $(d\alpha)^2$ и извлекая квадратный корень, получим

$$\frac{dl}{d\alpha} = \sqrt{\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{d\alpha}\right)^2}. \quad (3)$$

Введем обозначение:

$$\lambda = \frac{dl}{d\alpha} \quad (4)$$

и назовем λ подвижностью корня на траектории. Вообще говоря, λ — векторная величина, но так как направление вектора подвижности однозначно определяется направлением касательной в данной точке траектории, то достаточно рассматривать абсолютную величину подвижности. Таким образом,

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{d\delta}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{d\alpha}\right)^2}. \quad (5)$$

Равенство (5) представляет собой определение подвижности. Аналитический метод траекторий корней [6] дает уравнение траекторий в комплексной плоскости

$$f(\delta, \omega) = 0 \quad (6)$$

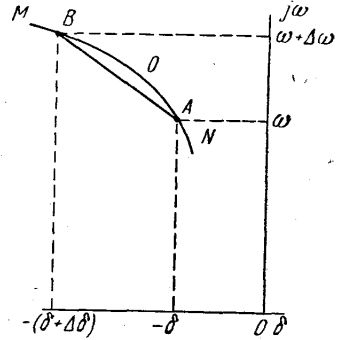


Рис.

и позволяет определить значение параметра в любой точке траектории

$$\alpha = \alpha(\delta, \omega). \quad (7)$$

Используя (6) и (7) и проведя некоторые преобразования, выражение (5) можно привести к виду

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{f'_\delta}{f'_\omega}\right)^2}{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \delta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \frac{f'_\delta}{f'_\omega}\right)^2}}. \quad (8)$$

Существуют два частных случая, для которых вид функции подвижности существенно упрощается.

Для ветвей траекторий, параллельных действительной оси ($\omega = \text{const}$)

$$\lambda = \left| \frac{d\delta}{d\alpha} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\alpha}{d\delta} \right|}. \quad (9)$$

Для ветвей траектории, параллельных мнимой оси ($\delta = \text{const}$)

$$\lambda = \left| \frac{d\omega}{d\alpha} \right| = \frac{1}{\left| \frac{d\alpha}{d\omega} \right|}. \quad (10)$$

Переход к обратным величинам производных в (9) и (10) связан с тем, что аналитически для этих случаев мы можем определить зависимость $\alpha(\delta)$ и $\alpha(\omega)$; определение же $\delta(\alpha)$ и $\omega(\alpha)$ для систем высоких порядков становится затруднительным.

Метод траекторий корней позволяет перейти от рассмотрения подвижности как функции δ и ω к рассмотрению подвижности как функции параметра α . Рассмотренная таким образом функция подвижности $\lambda(\alpha)$ имеет следующие характерные свойства.

Вид функции подвижности не зависит от положения мнимой оси.

В простых начальных точках траектории ($\alpha=0$) подвижность конечна.

При приближении корней к предельным точкам траекторий ($|\alpha| \rightarrow \infty$) подвижность стремится к нулю.

Предельная подвижность корней, уходящих в бесконечность по действительной оси ($|\alpha| \rightarrow \infty$) определяется асимптотическим порядком системы ($n - m$), где m и n — степени полиномов, определяющих предельные и начальные точки траектории соответственно, причем

$$\begin{aligned} \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \lambda &= \frac{b_0}{a_0} && \text{при } n - m = 1, \\ \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \lambda &= 0 && \text{при } n - m > 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где a_0 и b_0 — значения коэффициентов при старших членах уравнений начальных и предельных точек.

Подвижность корней, уходящих в бесконечность при $|\alpha| \rightarrow \infty$ по комплексным ветвям траектории, стремится к нулю.

Подвижность корней на действительных ветвях траекторий, проходящих через точку центра асимптот, имеет экстремум, соответствующий этой точке.

В экстремумах траекторий имеет место экстремум подвижности.

При приближении корня к кратной точке подвижность этого корня стремится к бесконечности.

Используя эти свойства и имея корневой портрет системы, можно, не проводя вычислений, построить качественную картину зависимости $\lambda = \lambda(\alpha)$ вдоль всей траектории и, следовательно, в разных областях значений параметра.

Предложенный метод позволяет исследовать и оценивать влияние вариации любого параметра, линейно входящего в коэффициенты характеристического уравнения, на положение полюсов передаточной функции линейной системы.

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность проф. К. Ф. Теодорчику за внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокотович П. В., Рутман Р. С. «Автоматика и телемеханика», 26, № 4, 1965.
2. Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1958.
3. Vode H. W. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. Van Nostrand, N. Y., 1945.
4. U. G. H. Trans. IRE, AC-5, No 1, 1960.
5. Kokotovic P., Siljak D. D. Trans AIEE, Appl. Ind., Sept. 1964.
6. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
6. 7 1967 г.

Кафедра
физики колебаний

УДК 537

А. И. КРОХИНА

ОБ АНИЗОТРОПИИ КАТОДНОГО РАСПЫЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ ДИЭЛЕКТРИКОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Впервые анизотропию катодного распыления монокристаллических образцов наблюдал Венера в 1954 г. [1]. Идея Венера заключается в следующем: ударяющий ион, взаимодействуя с твердым телом, передает свой импульс атому плотноупакованной цепочки распыляемого кристалла, вследствие чего на коллекторе вблизи распыляемого образца образуется осадок в виде симметричных пятен [2]. Авторы работ [3, 4, 5, 6, 7, 8] наблюдали распределение осадка в виде симметричных пятен при распылении поликристаллических мишеней, что они объясняют опять-таки как результат выбива-

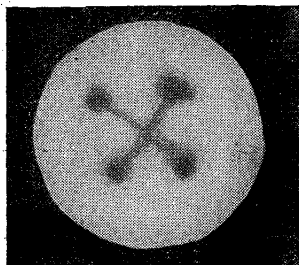


Рис. 1

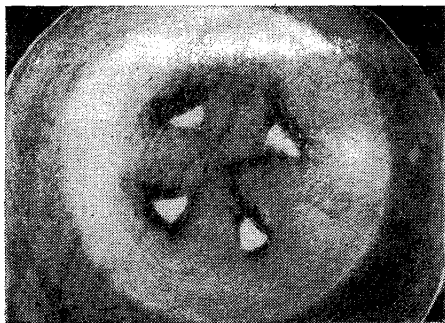


Рис. 2



Рис. 3

ния атомов в направлении наиболее плотной упаковки, преобладающего в данных кристаллах.

В работе [9] было показано, что при распылении образца в плоскости (111) NaCl получили осадки в виде дискретных пятен того же вида, как и при распылении плоскости (100) и объяснили, что образование дискретных пятен в осадке произошло вследствие неравномерного распределения плотности тока по поверхности распыляемого образца.

С целью подтверждения этого результата в настоящей работе при тех же условиях эксперимента были подвергнуты катодному распылению различные металлические, диэлектрические и полупроводниковые поликристаллы и монокристаллы с различной плоскостью среза. Исследуемыми веществами были:

C, Al, Al³⁺ (111)^{Si}, Si (111), Fe, Ni, Cu, Cu (111), Zn, Ca, Ge, G⁺ (111), Mo, Ag, Sn, Ta, W, Au, Pb лагунь, сталь, стекло NaCl (100), NaCl (110), NaCl (111), KBr (100), KBr (111). Независимо от структурного типа решетки кристаллического образца и плоскости среза одного и того же кристалла, в осадке всегда можно было получить распределение распыленного вещества в виде симметрично расположенной картины (рис. 1). На поверхности распыляемого образца визуально были заметны области наибольшего распыления, которые, как правило, соответствовали картине осадка (рис. 2).