Результаты расчета параметров ближнего порядка представлены в таблице, где a_{gk} — квадратичные смещения атомов:

	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	a_{gk}
20°C	—0,03	0,04	0,03	—0,02	—0,00	0,06
400°C	—0,03	0,03	0,03	—0,00	—0,01	0,04

Полученные значения параметров показывают, что в исследуемом сплаве Pd—Pt (50 ат. % Pd) при комнатной температуре и при 400° С, можно говорить о наличии порядка только на первых трех координационных сферах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кацнельсон А. А., Попова И. И. «Кристаллография», **10**, 5, 769, 1965.
2. Иверонова В. И., Кацнельсон А. А., Попова И. И., Свешников С. В. «Кристаллография», **12**, вып. 5, 888, 1967.
3. Миркин Л. И. Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов. М., Физматгиз, 1961.
4. Dauben C. H., Templeton D. Acta crystallogr., **8**, 841, 1955.
5. Смирнов А. А. Молекулярно-кинетическая теория металлов. М., «Наука», 1966.
6. Джеймс. Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. М., ИЛ, 1950.
7. Иверонова В. И., Кацнельсон А. А. «Физика металлов и металловед.», **17**, № 6, 809, 1964.
8. Семеновская С. В. «Физика твердого тела», **10**, № 10, 2841, 1966.

Поступила в редакцию
22. 8 1967 г.

Кафедра
общей физики для физиков

УДК 517.925

В. М. ВОЛОСОВ, Г. Н. МЕДВЕДЕВ, Б. И. МОРГУНОВ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ СИСТЕМАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Постановка задачи. Рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = \varepsilon X [x, x(t-\Delta), y, y(t-\Delta), t, \varepsilon],$$

$$\dot{y} = Y_0(x, y, t) + \varepsilon Y [x, x(t-\Delta), y, y(t-\Delta), t, \varepsilon], \tag{1}$$

а также некоторые системы нейтрального типа, близкие к виду (1).

Здесь X и Y — соответственно n и m- мерные векторные функции, $\varepsilon>0$ — малый параметр, Δ (запаздывание) — неотрицательная величина, которая может быть как постоянной, так и переменной.

Для систем вида (1) без запаздывания В. М. Волосовым [1, 2] развит метод усреднения вдоль траекторий так называемой вырожденной системы

$$x = \text{const}, \quad y = Y_0(x, y, t), \tag{2}$$

в которую переходит (1) при $\varepsilon=0$.

Системы более частного вида с постоянным запаздыванием исследовались с помощью метода усреднения в работах [3, 4] (в первом приближении) и [5, 6] (в любом приближении).

В настоящей заметке для систем вида (1) сообщаются результаты, относящиеся к разработке и обоснованию общей схемы построения асимптотических решений в любом приближении (относительно параметра ε).

В общем случае рассматривается запаздывание, зависящее как от t, так и от неизвестных функций x и y ($\Delta = \Delta(x, y, t)$).

Предполагается, что через каждую точку x_0, y_0, t_0 некоторой области G переменных x, y, t проходит единственная интегральная кривая системы (2), целиком принадлежащая G для $t_0 \leqslant t < \infty$. Пусть общее решение (2) известно в виде $y = \varphi(x, y_0, t_0, t) \equiv \varphi(t)$.

Предполагается, что для всех ξ, y_0, t_0 из области G равномерно относительно совокупности ξ, y_0, t_0 существуют не зависящие от y_0 пределы — средние значения вида

$$\overline{X_1}(\xi) \equiv \lim \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} X_1[\xi, \varphi(t), \varphi(y_0, t_0, t - \Delta(\xi, \varphi(t), t)), t]\, dt. \tag{3}$$

Здесь $X_1 \equiv X|_{\varepsilon=0}$.

Рассмотрим формальную замену переменных

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon u_1[\xi, \eta, \eta(t_1), t] + \varepsilon^2 u_2[\xi, \eta, \eta(t_1), \eta(t_2)\, t] + \varepsilon^3 \ldots \\ y &= \eta + \varepsilon\vartheta_1[\xi, \xi, \eta, \eta(t_1), t] + \varepsilon^2 \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$t_1 \equiv t - \Delta(\xi, \eta, t), \quad t_2 \equiv t_1 - \Delta[\varepsilon\xi(t_1), \eta(t_1), t_1],$$

приводящую к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon\, \overline{X_1}[\xi, \xi] + \varepsilon^2 A_2[\xi, \xi, \xi] + \varepsilon^3 \ldots \\ \dot{\eta} &= Y_0(x, y, t) + \varepsilon B_1[\xi, \xi] + \varepsilon^2 \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Величины A_2, B_1 и т. д. определяются как средние значения вида (3) от ряда известных функций правых частей системы (1).

Удерживая в правых частях (5) члены порядка ε^n, мы получаем так называемую усредненную систему n-го приближения. Ее решение является n-ным приближением для решения системы (5). Подставляя это решение в (4) и отбрасывая члены порядка ε^n и выше, получаем n-ное приближение для решений системы (1). Сказанное относится к определению переменных x. Переменные y в рамках каждого приближения определяются с точностью, на один порядок меньшей (см. по этому поводу [1]).

Асимптотическое и точное решения системы (1) сравниваются на интервале времени порядка $1/\varepsilon$.

Основные результаты

1. **Постоянное запаздывание** ($\Delta \equiv \mathrm{const}$). Начальные данные для системы (1) задаются на начальном множестве $E_0: [t_0 - n\Delta, t_0]$ в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon f_1(t) + \ldots + \varepsilon^n f_n(t), \\ y &= \varphi(t) + \varepsilon g_1(t) + \ldots + \varepsilon^{n-1} g_{n-1}(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi(t)$ — решение системы (2), а n определяется номером приближения. Такой вид начальных данных не ограничивает общности в том смысле, что если начальные функции не имеют вида (6), то система (1) может быть приближенно проинтегрирована в промежутке $[t_0, t_0 + n\Delta]$ с требуемой асимптотической точностью (результат будет иметь форму (6)), и этот промежуток можно рассматривать в качестве начального множества.

Основными требованиями теоремы о первом приближении являются существование интегрального многообразия системы (2), обладающего достаточными свойствами гладкости, существование средних значений вида (3), а также существование и единственность решений системы (1) и усредненной системы первого приближения:

$$\dot{\xi} = \varepsilon\, \overline{X_1}[\xi, \xi]. \tag{7}$$

При выполнении этих, а также некоторых других условий, касающихся, в частности, свойств начального многообразия системы (1), равномерно в промежутке $[t_0, t_0 + L/\varepsilon]$, где L — сколь угодно большое положительное число, имеет место оценка $|x-\xi| = O(1)$, если (x, y) является решением (1), а ξ — решение системы (7).

Во втором приближении при выполнении дополнительных требований существования средних значений вида (3) от некоторых функций, определяемых правыми частями (1) и их производными, а также условий, обеспечивающих их достаточную гладкость, равномерно в промежутке $[t_0, t_0+L/\varepsilon]$ справедливы оценки $|x-\xi, -\varepsilon u_1|=0(\varepsilon)$; $|y-\eta|=0$, где (x, y) — решение (1), u_1 — некоторая известная ограниченная функция, а (ξ, η) — решение усредненной системы второго приближения, в которой, согласно сказанному выше о точности определения величины x и y, достаточно ограничиться коэффициентами A_2 и B_1.

Аналогично рассматриваются высшие приближения.
Если решение (7i) известно, то величины ξ $(i \geqslant 1)$ для следующих приближений находятся с помощью квадратур.

2. **Переменное запаздывание** $(\Delta \equiv \Delta(t))$. Начальные данные для системы (1) задаются на начальном множестве $E_0: [t_0 - \gamma_n^*(t_0), t_0]$ в виде (6) и, кроме того $0<\delta_0 \leqslant \Delta \leqslant \Delta_0$, Здесь $\gamma_n^*(z) \equiv \gamma^*[\gamma^* \ldots (\gamma^*(z)) \ldots]$—$n$-ая итерация операций $\gamma^*(z)$, где $\gamma^*(z)$ — момент, начиная с которого прекращается влияние состояний, предшествующий моменту z.

При некоторых дополнительных условиях, например, $1-\Delta_t' \geqslant \alpha > 0$ получены результаты, аналогичные п. 1. Усредненная система n-го приближения также может быть решена асимптотически, если известно решение системы (7).

3. **Запаздывание, зависящее от неизвестных функций** $(\Delta \equiv \Delta(x, y, t))$. **Функция** $\Delta(x, y, t)$ предполагается равномерно ограниченной $(0<\delta_0 \leqslant \Delta(x, y, t) \leqslant \Delta_0$. Начальные данные вида (6) задаются на начальном множестве $E_0: (t_0 - n\Delta_0; t)$.

При выполнении некоторых дополнительных условий, в частности, существования ограниченных частных производных функций $\Delta(x, y, t)$ получены результаты, сходные с результатами п.п. 1, 2.

Аналогичные оценки получены для систем нейтрального типа, отличающихся от (1) тем, что функции X и Y зависят еще от $\left.\frac{dx(z)}{dz}\right|_{z=t-\Delta}$. Рассматривались все указанные выше типы запаздываний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, вып. 6, (108), 1962.
2. Волосов В. М. Диссертация. Киев, Ин-т механики АН УССР, 1961.
3. Халанай. Revue de math. pures et appl., 6, No. 3, 1959.
4. Рубаник В. П. Научн. ежегодн. Черновиц. ун-та за 1959 г., 1960.
5. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1965.
6. Медведев Г. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 4, 1966.

Поступила в редакцию
25. 4 1967 г.

Кафедра
математики