

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1968

УДК 621.372.061

Г. А. БЕНДРИКОВ, Ф. Б. КОНЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С «ЧИСТЫМ» ЗАПАЗДЫВАНИЕМ (СВОБОДНЫЙ ПАРАМЕТР — τ)

Получены уравнения траекторий корней и формулы параметра для систем n -го порядка с «чистым» запаздыванием для случая, когда свободным параметром является время запаздывания — τ . Рассмотрены общие свойства траекторий корней, получены формулы для вычисления критических значений частоты и параметра. Приведен пример, иллюстрирующий применение предлагаемого метода.

Характеристическое уравнение линейных систем, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, во многих случаях можно привести к виду

$$\Phi_n(p) + k\Psi_m(p)e^{-p\tau} = 0, \quad (1)$$

где $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ — полиномы от p ($p = \delta + j\omega$) с постоянными действительными коэффициентами целых степеней n и m соответственно, причем $n \geq m$; $\tau > 0$ — время запаздывания; k — параметр, обычно полный коэффициент усиления разомкнутой системы.

Известно [1, 2], что переходной процесс (реакции на единичный скачок) в системе с запаздыванием определяется в основном наименьшими по модулю (неасимптотическими) корнями характеристического уравнения (1).

Метод траекторий корней [3] позволяет не только находить близкие корни уравнения (1), которые определяют переходной процесс, но и исследовать устойчивость системы и изменение динамических свойств системы внутри области устойчивости при изменении какого-либо свободного параметра. Ранее [4] было рассмотрено решение уравнения (1) методом траекторий корней в случае, когда свободным параметром является коэффициент усиления k .

В данной работе показано применение этого метода для исследования динамических свойств линейной системы с запаздыванием (внутри области устойчивости и на границе ее), когда свободным параметром является время запаздывания τ .

Уравнения траекторий и формулы параметра

Траектории ближайших к началу координат корней уравнения (1) при использовании соответствующих вычислительных машин можно

построить, непосредственно решая (например, методом Ньютона) уравнение (1) для различных значений времени запаздывания τ , взятых из некоторого интервала. Однако непосредственное применение вычислительных машин требует предварительного выделения корней уравнения (1), что представляет собой сложную задачу. Кроме того, интервал изменения времени запаздывания может оказаться достаточно широким.

Уравнение траекторий корней, связывающее координаты δ и ω точек комплексной плоскости p , принадлежащих траекториям, получается из характеристического уравнения (1) путем подстановки $p = \delta + j\omega$, разделения действительной и мнимой частей и исключения свободного параметра.

Используя соотношения [3]

$$\Phi_n(p) = \Phi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Phi_j(\delta, \omega^2), \quad (2)$$

$$\Psi_m(p) = \Psi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Psi_j(\delta, \omega^2),$$

где

$$\Phi_r = \Phi_n(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{IV}(\delta) - \dots$$

$$\Phi_j = \Phi_n'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^{V}(\delta) - \dots$$

$$\Psi_r = \Psi_m(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Psi_m''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Psi_m^{IV}(\delta) - \dots \quad (3)$$

$$\Psi_j = \Psi_m'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Psi_m'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Psi_m^{V}(\delta) - \dots$$

из (1) после несложных преобразований получим [4, 5] два уравнения

$$\operatorname{tg} \omega\tau = \omega \frac{\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r}{\Phi_r\Psi_r + \omega^2\Phi_j\Psi_j}, \quad (4)$$

и

$$k^2 = \frac{|\Phi_n(p)|^2}{|\Psi_m(p)|^2} \cdot e^{2\delta\tau} = \frac{\Phi_r^2 + \omega^2\Phi_j^2}{\Psi_r + \omega^2\Psi_j^2} \cdot e^{2\delta\tau}. \quad (5)$$

Подстановка τ из (5)

$$\tau = \frac{1}{\delta} \ln \left| k \frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)} \right| \quad (\delta \neq 0) \quad (6)$$

в формулу (4) дает уравнение траекторий корней в виде

$$\operatorname{tg} \left[\frac{\omega}{\delta} \ln \left| k \frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)} \right| \right] = \omega \frac{\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r}{\Phi_r\Psi_r + \omega^2\Phi_j\Psi_j} \quad (\delta \neq 0). \quad (7)$$

Выражение (6) представляет собой формулу параметра, с помощью которой можно вычислить значение τ , соответствующее любому корню уравнения (1), кроме тех, которые расположены на мнимой оси. Используя формулу параметра (6), на траектории можно нанести шкалу изменения свободного параметра τ или построить линии постоянного запаздывания ($\tau = \text{const}$), пересечения которых с ветвями траекторий дают значения корней, соответствующих какому-либо фиксированному значению τ .

Получим теперь уравнение траекторий корней и формулу параметра в несколько иной форме. Предположим без ограничения общности, что

коэффициенты при старших степенях p в полиномах $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ равны единице. Тогда можно написать

$$\Phi_n(p) = \prod_{\nu=1}^n (p - p_\nu); \quad \Psi_m(p) = \prod_{\mu=1}^m (p - z_\mu),$$

где $p_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n)$ и $z_\mu (\mu = 1, 2, \dots, m)$ — корни полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ соответственно. Выражения $(p - p_\nu)$ и $(p - z_\mu)$ представляют собой векторы на комплексной плоскости p , поэтому

$$p - p_\nu = |p - p_\nu| e^{i\varphi_\nu}; \quad p - z_\mu = |p - z_\mu| e^{i\psi_\mu}. \quad (8)$$

Модули и фазовые углы векторов (8) обычно легко определяются, так как корни p_ν и z_μ полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ в случае однопетлевых систем являются полюсами и нулями передаточной функции разомкнутой системы, положение которых на p -плоскости можно считать известным.

Из характеристического уравнения (1), записанного в виде

$$\prod_{\nu=1}^n (p - p_\nu) + k e^{-p\tau} \prod_{\mu=1}^m (p - z_\mu) = 0,$$

учитывая, что коэффициент усиления k принимает только действительные значения, получаются соотношения

$$k \cdot (-1)^{N+1} = e^{\delta\tau} \frac{\prod_{\nu=1}^n |p - p_\nu|}{\prod_{\mu=1}^m |p - z_\mu|}, \quad (9)$$

$$\omega\tau + \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu - \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu = \pi N, \quad (10)$$

где $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из (9) имеем формулу параметра в виде

$$\tau = \frac{1}{\delta} \left[\ln |k| - \sum_{\nu=1}^n \ln |p - p_\nu| + \sum_{\mu=1}^m \ln |p - z_\mu| \right], \quad (\delta \neq 0). \quad (11)$$

Подставив τ в (10), получим фазовое уравнение траекторий корней уравнения (1) (τ — свободный параметр):

$$\frac{\omega}{\delta} \left[\ln |k| - \sum_{\nu=1}^n \ln |p - p_\nu| + \sum_{\mu=1}^m \ln |p - z_\mu| \right] + \sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu - \sum_{\mu=1}^m \psi_\mu = \pi N$$

$$(N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (12)$$

Общие свойства траекторий корней уравнения (1)

С помощью полученных формул выясним некоторые общие свойства траекторий корней уравнения (1). Знание этих свойств помогает при построении и использовании траекторий.

Основные начальные и предельные точки. Заметим прежде всего, что время запаздывания является существенно положительной величиной. Будем считать, что τ принимает любое значение,

лежащее в интервале $0 < \tau < +\infty$. Тогда основные начальные ($\tau=0$) и предельные ($\tau=+\infty$) точки траекторий определяются соответственно из уравнений

$$\Phi_n(\rho) + k\Psi_m(\rho) = 0 \quad (13)$$

и

$$\Phi_n(\rho) = 0. \quad (14)$$

Кроме основных начальных точек траектории корней уравнения (1) имеют бесконечное число бесконечно удаленных начальных точек, расположенных слева от мнимой оси p -плоскости [4].

Как известно, различным знакам коэффициента усиления k в характеристическом уравнении (1) (и, следовательно, различным значениям N в (9)—(12)) соответствуют различные знаки обратной связи в системе. Случай $k > 0$ (нечетные N) соответствует отрицательной, случай $k < 0$ (четные N) — положительной обратной связи.

Уравнение (13) показывает, что различным знакам обратной связи соответствуют различные основные начальные точки траекторий корней уравнения (1).

Разбиение действительной оси. Из уравнений траекторий (7) и (12) следует, что действительная ось p -плоскости ($\omega=0$) целиком принадлежит траекториям корней уравнения (1).

На действительной оси ($\omega=0$) уравнение траекторий (12) имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu} - \sum_{\mu=1}^m \psi_{\mu} = \pi N \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (15)$$

Отсюда следует [3, 4], что действительные корни полиномов $\Phi_n(\rho)$ и $\Psi_m(\rho)$ разбивают действительную ось на отрезки, соответствующие различным значениям N в уравнениях (10) и (12). Четные или нечетные значения N , в свою очередь, соответствуют различным знакам коэффициента усиления k , т. е. различным знакам обратной связи.

Симметрия траекторий относительно действительной оси. Траектории корней симметричны относительно действительной оси p -плоскости, так как перемена знака ω не изменяет уравнение траекторий (7).

Углы входа и выхода траекторий. Фазовое уравнение траекторий (12) дает возможность определить углы, которые образуют с положительным направлением действительной оси ветви траекторий корней при прохождении через любую точку p -плоскости, принадлежащую этим траекториям. В частности, уравнение (15) показывает, что из некротной действительной основной начальной точки корни расходятся при увеличении параметра τ по действительной оси. Вблизи кратной действительной точки ветви траекторий образуют правильную «звезду» [3, 4].

Кратные точки. Корни уравнения (1) при непрерывном изменении параметра τ могут встречаться и образовывать кратные точки. Уравнение для определения действительных кратных точек получим, перейдя в уравнении траекторий (7) к пределу при $\omega \rightarrow 0$. Оно имеет вид

$$\ln \left[\left| k \frac{\Psi_m(\delta)}{\Phi_n(\delta)} \right| \right] = \delta \frac{\Phi_n(\delta) \Psi'_m(\delta) - \Phi'_n(\delta) \Psi_m(\delta)}{\Phi_n(\delta) \cdot \Psi_m(\delta)}. \quad (16)$$

Выделение областей p -плоскости, соответствующих $\tau > 0$. Формально во всех полученных формулах параметр может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Но

время запаздывания — существенно положительная величина. Поэтому из всех траекторий корней, определяемых уравнениями (7) и (12), необходимо выделить те, которые соответствуют $\tau > 0$.

Из формулы параметра (6) следует, что траектории корней, соответствующие $\tau > 0$, расположены в областях p -плоскости, определяемых неравенствами

$$\text{в левой полуплоскости } \left| k \frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)} \right| < 1, \quad (17)$$

$$\text{в правой полуплоскости } \left| k \frac{\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)} \right| > 1, \quad (18)$$

Выделение траекторий, соответствующих $k > 0$ и $k < 0$. В уравнения траекторий (7) и (12) входит абсолютная величина коэффициента усиления разомкнутой системы k . Среди траекторий, построенных по этим уравнениям, необходимо выделить те, которые соответствуют одному знаку коэффициента усиления, т. е. одному знаку обратной связи в системе.

Выше было отмечено, что случаю $k > 0$ соответствуют нечетные значения N в фазовом уравнении траекторий (12), а случаю $k < 0$ — четные значения N в этом уравнении. Уравнение (12) показывает, кроме того, что ветви траекторий, соответствующие четным и нечетным N (четные и нечетные траектории), чередуются на комплексной плоскости p . Поэтому практически достаточно определить, какому N , а следовательно, и какому знаку обратной связи, соответствует какая-нибудь одна ветвь траекторий корней уравнения (1). Для этой цели следует воспользоваться разбиением действительной оси корнями полиномов $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ на отрезки, соответствующие различным значениям N . Разбиение действительной оси производится по уравнению (15).

Определение критических значений частоты и параметра. Для определения критических значений частоты и параметра, соответствующих границе устойчивости системы, используем выражения (4) и (5). При $\delta = 0$ в формулу (5) параметр τ не входит, и она имеет вид

$$k^2 = \frac{\Phi_r^2(0, \omega^2) + \omega^2 \Phi_j^2(0, \omega^2)}{\Psi_r^2(0, \omega^2) + \omega^2 \Psi_j^2(0, \omega^2)}. \quad (19)$$

Отсюда находятся критические значения частоты ω_h , или, иначе говоря, точки пересечения мнимой оси $\delta = 0$ ветвями траекторий корней уравнения (1).

Критические значения параметра τ_h определяются из (4) после подстановки $\delta = 0$, $\omega = \omega_h$ ($\omega \neq 0$)

$$\tau_h = \frac{1}{\omega_h} \arctg \omega_h \frac{\Phi_r(0, \omega_h^2) \Psi_j(0, \omega_h^2) - \Phi_j(0, \omega_h^2) \Psi_r(0, \omega_h^2)}{\Phi_r(0, \omega_h^2) \Psi_r'(0, \omega_h^2) + \omega_h^2 \Phi_j(0, \omega_h^2) \cdot \Psi_j(0, \omega_h^2)}. \quad (20)$$

Следует отметить, что уравнение критических частот (19) представляет собой уравнение относительно ω^2 , поэтому степень его в большинстве случаев сравнительно невысока. Из уравнения (19) видно, что максимально возможное число критических частот конечно.

Формула критического параметра (20) дает бесконечное число различных значений τ_h для каждого ω_h . Это означает, что мнимую ось в каждой точке $\omega = \omega_h$ пересекает бесконечное число ветвей траекторий. Однако корни уравнения (1),двигающиеся с ростом τ по этим траекториям, выходят на мнимую ось не одновременно, но последовательно.

Асимптотические свойства траекторий при $\tau \rightarrow \infty$. Формулы (6) и (20) определяют параметр τ всюду, кроме начала координат p -плоскости. Однако эти формулы показывают, что при одновременном стремлении δ и ω к нулю, т. е. при приближении по траекториям к началу координат, $\tau \rightarrow \infty$. Это означает, что те корни уравнения (1), которые не идут в основные предельные точки, приближаются при $\tau \rightarrow \infty$ к началу координат p -плоскости.

Пример

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий применение полученных выше уравнений и общих свойств траекторий корней. Пусть характеристическое уравнение (1) имеет вид

$$p + ke^{-p\tau} = 0. \quad (21)$$

Предположим, что $|k|=1$. Основные точки траекторий, определенные по уравнениям (13) и (14), приведены в следующей таблице:

	$k=1 > 0$	$k=-1 < 0$
Начальные точки ($\tau = 0$)	-1	+1
Предельные точки ($\tau \rightarrow \infty$)	0	0

Из таблицы видно, что основные начальные точки различны для различных знаков коэффициента усиления, а основные предельные точки совпадают (рис. 1).

Полиномы $\Phi_n(p)$ и $\Psi_m(p)$ в данном случае имеют вид

$$\Phi_n(p) = p; \quad \Psi_m \equiv 1.$$

Отсюда, и из уравнения (15), следует, что точка $p=0$ разбивает действительную ось p -плоскости на две части, причем полуось $\delta > 0$ соответствует $k < 0$ (положительной обратной связи), и полуось $\delta < 0 - k > 0$ (отрицательной обратной связи).

В соответствии с неравенствами (17) и (18) траектории корней, уравнения (21) для $\tau > 0$ расположены в левой полуплоскости, за исключением области, ограниченной дугой окружности

$$\delta^2 + \omega^2 = 1, \quad (22)$$

и в правой полуплоскости в области, ограниченной дугой этой же окружности.

При $k > 0$ (отрицательная обратная связь) корень из основной начальной точки $p = -1$ с ростом параметра τ двигается влево по действительной оси до встречи с другим корнем, идущим по действительной оси слева направо из $-\infty$. Эти корни при встрече образуют кратную точку $\delta = -e$, которая определяется из уравнения кратных точек (16). Это уравнение в данном случае имеет вид

$$\ln|\delta| = 1. \quad (23)$$

Значение параметра τ , при котором корни встречаются в кратной точке, равно $\tau = \frac{1}{e}$. Оно определяется по формуле параметра (6), которая здесь имеет вид

$$\tau = -\frac{1}{2\delta} \ln(\delta^2 + \omega^2). \quad (24)$$

При дальнейшем возрастании параметра τ корни выходят из кратной точки на комплексную плоскость. Траектории корней образуют при этом с действительной осью угол, равный $\frac{\pi}{2}$.

При $k < 0$ (положительная обратная связь) корень из основной начальной точки $p=1$ с ростом параметра τ двигается влево по действительной оси в основную предельную точку $p=0$.

Все другие корни уравнения (21) как при $k > 0$, так и при $k < 0$ идут с ростом τ из бесконечно удаленных начальных точек, приближаясь к мнимой оси. На рис. 1 направление движения корней, соответствующих $k > 0$, обозначено одной стрелкой на ветвях траекторий, и корней, соответствующих $k < 0$ — двойной стрелкой.

Стрелки на рис. 1 поставлены именно таким образом в соответствии с разбиением действительной оси. Правильность разделения траекторий на две группы, соответствующих $k > 0$ и $k < 0$, можно проверить с помощью фазового уравнения траекторий (12), которое в этом случае имеет вид

$$-\frac{\omega}{2\delta} \ln(\delta^2 + \omega^2) + \varphi_1 = \pi N \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (25)$$

Здесь φ_1 — угол, образованный с положительным направлением действительной оси вектором, проведенным из начала координат в исследуемую точку на траектории.

Траектории корней симметричны относительно действительной оси p -плоскости. Поэтому на рис. 1 изображена только верхняя полуплоскость.

Уравнение критических частот (19) в данном случае имеет вид

$$\omega_k^2 = 1. \quad (26)$$

Таким образом, имеется только одна критическая частота $\omega_k = 1$ и, следовательно, только одна (в верхней полуплоскости) точка пересечения бесконечного числа ветвей траекторий с мнимой осью. Критические значения параметра в силу (20) равны

$$\tau_k = \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} + \pi M \quad (M = 0, 1, 2, \dots). \quad (27)$$

Представленные на рис. 1 несколько ветвей траекторий корней уравнения (21) построены по уравнению траекторий (7), которое в этом случае имеет вид

$$\operatorname{tg} \left[\frac{\omega}{2\delta} \ln(\delta^2 + \omega^2) \right] = \frac{\omega}{\delta}. \quad (28)$$

На диаграмму траекторий нанесен ряд линий постоянного запаздывания, построенных по формуле параметра (24).

Подробное рассмотрение траекторий корней уравнения (21) позволяет сделать определенные выводы о свойствах системы, описываемой этим уравнением.

Прежде всего отметим, что при положительной обратной связи ($k < 0$) система неустойчива при любом τ , так как в правой полуплоскости всегда есть корень на действительной оси.

Характер линий постоянного запаздывания показывает, что затухание корней δ тем больше, чем больше ω . Отсюда следует: 1. Если ближайший к началу координат корень расположен в левой полуплоскости, то и все другие корни, идущие из бесконечно удаленных начальных точек, расположены в левой полуплоскости. Поэтому рассматри-

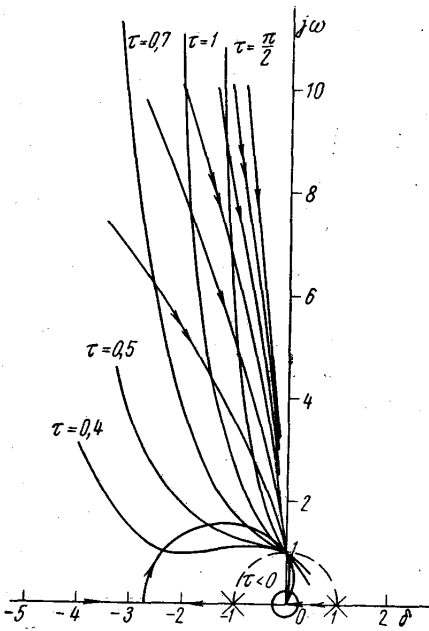


Рис. 1

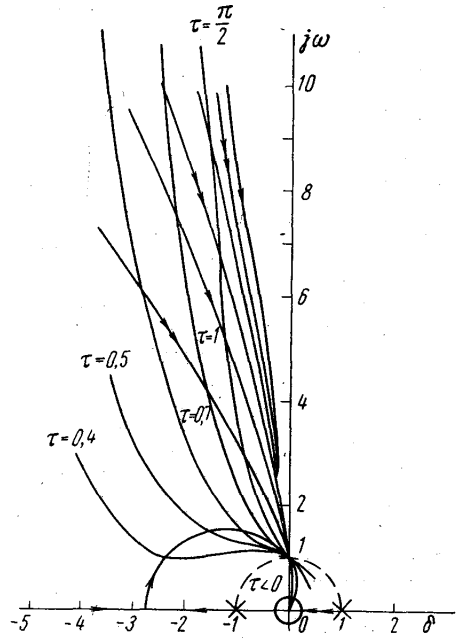


Рис. 2

ваемая система при отрицательной обратной связи ($k=1$) устойчива при $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$, т. е. до тех пор, пока ближайший корень не выйдет на мнимую ось.

Переходный процесс определяется в основном близкими корнями. Высокочастотные корни дают вклад в переходной процесс лишь в самом начале его.

Линии постоянного запаздывания дают возможность графически определить несколько ближайших к началу координат корней уравнения (21). Например, при $\tau=1$ это уравнение имеет корни ($k=1$).

$$p_{1,2} = -0,31 \pm j1,31; \quad p_{3,4} = -2,06 \mp j7,58; \quad p_{5,6} = -2,5 \pm j13,53.$$

При этом значении времени запаздывания для построения переходного процесса достаточно учесть только одну пару корней $p_{1,2}$.

Рис. 1 показывает, что степень устойчивости системы [6], определяемая действительным корнем при $k=1$ и увеличении τ от нуля увеличивается, достигая максимального значения при $\tau = \frac{1}{e}$, т. е. при встрече двух действительных корней в кратной точке $\delta = -e$. При дальнейшем увеличении τ степень устойчивости, определяемая теперь дей-

ствительной частью ближайшей к началу координат пары комплексно-сопряженных корней, уменьшается до нуля, что соответствует выходу этих корней на мнимую ось.

На рис. 2 представлены траектории нескольких ближайших к началу координат комплексной плоскости корней уравнения

$$p + 2 + ke^{-pt} = 0, \quad |k| = 1. \quad (29)$$

Из рисунка видно, что все корни этого уравнения при $t \rightarrow \infty$ приближаются к началу координат, оставаясь слева от мнимой оси. Это означает, что система, описываемая характеристическим уравнением (29), абсолютно устойчива по параметру t как при отрицательной, так и при положительной обратной связи. Диаграмма траекторий (рис. 2) позволяет провести анализ динамических свойств рассматриваемой системы при любом t .

Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что теорема о смещении мнимой оси [3, 4] в случае, когда свободным параметром является время запаздывания, не справедлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М., ИЛ, 1961.
2. Кисляков В. С. «Автоматика и телемеханика», 22, № 12, 1961.
3. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
4. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ. астр. № 4, 1967.
5. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. Общие свойства траекторий корней линейных систем с «чистым» запаздыванием. Труды III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (технической кибернетике), 1965, Одесса; Изд. АН СССР, 1968.
6. Цыпкин Я. З. «Автоматика и телемеханика», 8, № 3, 1947.

Поступила в редакцию
29.5 1967 г.

Кафедра
физики колебаний