ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1968

УДК 521.401

С. Н. ВАШКОВЬЯК

# ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОРБИТЫ СПУТНИКОВ МАРСА

В работе изучаются промежуточные орбиты спутников Марса, основанные на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров. Полученные формулы описывают движение спутников с любыми наклонами орбит к плоскости экватора и с эксцентриситетами, не превосходящими 0,1. Рассмотрено приложение выведенных формул к естественным спутникам Марса Фобосу и Деймосу.

## Введение

Целью настоящей работы является изучение промежуточных орбит спутников Марса, основанных на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров. Преимуществом таких промежуточных орбит по сравнению с кеплеровскими является то, что они строго учитывают как вторую, так и третью зональные гармоники потенциала притяжения Марса. При этом за исходные формулы мы возьмем формулы из работы [1], в которой Е. П. Аксеновым получено решение обобщенной задачи двух неподвижных центров в случае несимметричного расположения неподвижных центров относительно плоскости экватора планеты.

В печати имеются работы, в которых рассматривается движение естественных спутников Марса. В начале XX в. Г. Струве [2] занимался построением аналитической теории движения Фобоса и Деймоса, используя наблюдения, проведенные с 1877 по 1910 г. на различных обсерваториях. За последние 10 лет появилось несколько работ М. П. Косачевского, в которых он исследовал влияние Солнца на движение Фобоса и Деймоса, а также взаимное влияние этих двух спутников [3]—[5].

При построении аналитической теории движения естественных спутников Марса использовался тот факт, что Фобос и Деймос двигаются по почти круговым орбитам вблизи экватора планеты. В настоящее время в связи с тем, что в недалеком будущем можно ожидать появления искусственных спутников Марса, следует поставить более общую задачу, а именно, изучить движение спутников Марса, орбиты которых имеют различные наклоны к плоскости экватора планеты, но малые значения эксцентриситетов. В дальнейшем мы будем предполагать, что эксцентриситет не превосходит 0,1. При такой постановке полученные формулы будут, с одной стороны, описывать движение Фобоса и Деймоса и, с другой, могут быть использованы для изучения орбит искусственных спутников Марса с малыми эксцентриситетами.

## Постановка задачи

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс Марса, плоскость $Oxy$ которой совпадает с плоскостью экватора, а ось $Ox$ направлена в точку пересечения экватора Марса и экватора Земли.

Будем пока принимать Марс за осесимметричное тело. Тогда потенциал $V$ притяжения Марса будет даваться формулой

$$V = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} I_k \left(\frac{R_0}{r}\right)^k P_k\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \tag{1}$$

в которой $f$ — постоянная тяготения, $m$ — масса Марса, $I_k$ — некоторые безразмерные постоянные, $R_0$ — экваториальный радиус Марса, $r$ — радиус-вектор спутника, $P_k\left(\frac{z}{r}\right)$ — полиномы Лежандра $k$-го порядка.

Чтобы получить промежуточную орбиту, потенциал $V$ аппроксимируем потенциалом $U$ обобщенной задачи двух неподвижных центров:

$$U = \frac{fm}{2}\left\{\frac{1+i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma+i)]^2}} + \frac{1-i\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+[z-c(\sigma-i)]^2}}\right\}, \tag{2}$$

где $c$ и $\sigma$ — постоянные, $i=\sqrt{-1}$.

Если разложить $U$ в ряд по полиномам Лежандра, будем иметь

$$U = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_k}{r^k} P_k\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \tag{3}$$

где

$$\gamma_k = \frac{c^k}{2}\{(1+i\sigma)(\sigma+i)^k + (1-i\sigma)(\sigma-i)^k\}. \tag{4}$$

Выбирая $c$ и $\sigma$ из условий

$$\gamma_2 = I_2 R_0^2, \quad \gamma_3 = I_3 R_0^3,$$

получим

$$c = R_0\left\{-I_2 - \left(\frac{I_3}{2I_2}\right)^2\right\}^{1/2},$$

$$\sigma = \frac{I_3}{2I_2}\cdot\frac{R_0}{c}.$$

Для Марса достаточно надежно известен коэффициент $I_2 = -0{,}0020$, определенный по движению Фобоса [6]. Если положить $I_2 = -0{,}0020$, $I_3 = 0$, $R_0 = 3360{,}0$ *км*, то $c = 150{,}2638$ *км*, $\sigma = 0$. Если предположить, что коэффициент $I_3$ у Марса такой же, как у Земли, т. е. $I_3 = 2{,}3\cdot 10^{-6}$, то $c = 150{,}2625$ *км*, $\sigma = -0{,}012858$.

В выбранной системе координат уравнения движения спутника с нулевой массой можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt_2} - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt_2} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{5}$$

Уравнения (5) будут описывать возмущенное движение спутника, если в функцию $R$ включить разность $V-U$ между потенциалом реального Марса и силовой функцией задачи двух неподвижных центров, а также тессеральные гармоники потенциала Марса, члены, обусловленные притяжением Солнца, естественных спутников Марса и т. д.

При $R=0$ мы будем иметь промежуточные орбиты, рассмотрению которых и посвящена настоящая работа.

## Формулы промежуточного движения

Согласно работе [1] общее решение уравнений

$$\frac{d^2x}{dt_2} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \rho' (\cos\varphi \cos\overline{\Omega} - \alpha \sin\varphi \sin\overline{\Omega} - \beta \sin\overline{\Omega}), \\ y &= \rho' (\cos\varphi \sin\overline{\Omega} + \alpha \sin\varphi \cos\overline{\Omega} + \beta \cos\overline{\Omega}), \\ z &= c\sigma + \Delta (s \cdot \sin\varphi + \gamma), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\sqrt{(\xi^2+c^2)(1-\varepsilon^2\sigma^2)}}{1+d\sin\varphi}, \\ \Delta &= \frac{\xi}{1+d\sin\varphi}, \\ \xi &= \frac{a[(1-e\overline{e})+(\overline{e}-e)\cos\psi]}{1+\overline{e}\cos\psi}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi = \overline{\varphi} + \frac{k_1^2}{8}\sin 2\overline{\varphi} - \frac{k_2^2}{8}\sin 2\psi, \tag{8}$$

$$\overline{\varphi} = (1+\nu)\psi + \omega_0. \tag{9}$$

Переменная $\psi$ связана со временем $t$ уравнениями:

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1+\overline{e}}{1-\overline{e}}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{10}$$

$$E = M + e^*\sin E + \lambda\psi - \lambda_1\sin\psi - \overline{\lambda}_1\cos\overline{\varphi} - \overline{\lambda}_3\cos 3\overline{\varphi} - \overline{\lambda}_2\sin 2\overline{\varphi}, \tag{11}$$

$$M = n_0(t-t_0) + M_0, \tag{12}$$

а $\overline{\Omega}$ дается формулой

$$\overline{\Omega} = \mu\psi + \Omega_0 + \mu_1\sin\psi + \mu_2\sin 2\psi + \overline{\mu}_1\cos\overline{\varphi} + \overline{\mu}_2\sin 2\overline{\varphi}. \tag{13}$$

Здесь $a$, $e$, $i$, $\omega_0$, $\Omega_0$, $M_0$ — элементы промежуточной орбиты, которые при $c=\sigma=0$ обращаются соответственно в большую полуось, эксцентриситет, наклон к плоскости экватора, долготу восходящего узла, расстояние перицентра от узла, среднюю аномалию в эпоху. Коэффициенты в формулах (6)—(13) суть ряды по степеням малого параметра

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1-e^2)}. \tag{14}$$

Поскольку $a(1-e) > R_0$, то, принимая во внимание (14), найдем $\varepsilon < \frac{1}{20}$.

Считая $\varepsilon$ — членом первого порядка малости и сохраняя члены до пятого порядка включительно, мы будем делать ошибку порядка $10^{-7}$. При такой точности для постоянных, входящих в формулы (6)—(13), будем иметь

$$s = \sin i, \quad \alpha = \sqrt{1 - s^2},$$

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= e\{1 + \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - 2s^2) + \varepsilon^4(3 - 16s^2 + 14s^4)\}, \\
e^* &= e\{1 - \varepsilon^2(1 - e^2)(1 - s^2) + 3\varepsilon^4 s^2(1 - s^2)\}, \\
k_1^2 &= \varepsilon^2 s^2\{1 - e^2 + \sigma^2 - 4\varepsilon^2(1 - s^2)\}, \\
k_2^2 &= \varepsilon^2 e^2\{s^2 - \varepsilon^2(1 - 10s^2 + 11s^4)\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\beta = 2\varepsilon\sigma\alpha\{s - \varepsilon^2 s(4 - 5s^2)\},$$

$$\gamma = -\varepsilon\sigma\{1 - 2s^2 - \varepsilon^2(3 - 12s^2 + 10s^4)\},$$

$$\nu = \frac{\varepsilon^2}{4}(1 + \sigma^2)(12 - 15s^2) + \frac{\varepsilon^4}{64}(288 - 1296s^2 + 1035s^4). \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= -\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha\left\{1 + \sigma^2 + \frac{\varepsilon^2}{8}(6 - 17s^2)\right\}, \\
\mu_1 &= -2\varepsilon^2\alpha e\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{8}(4 - 28s^2)\right\}, \\
\mu_2 &= -\frac{\varepsilon^2}{4}e^2\alpha\left\{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(22 + s^2)\right\}, \\
\bar{\mu}_1 &= \varepsilon^3\sigma\alpha s; \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\varepsilon^4}{32}\alpha s^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{\varepsilon^4}{16}(24 - 96s^2 + 75s^4), \\
\lambda_1 &= -\frac{1}{4}\varepsilon^4 s^2 e(4 - 5s^2), \\
\bar{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s(4 - 5s^2), \quad d = \varepsilon\sigma s[1 - \varepsilon^2(5 - 6s^2)]. \\
\bar{\lambda}_2 &= -\frac{1}{4}\varepsilon^2 s^2(1 - e^2)^{3/2}, \quad \bar{\lambda}_3 = -\frac{1}{6}\varepsilon^3\sigma s^3.
\end{aligned} \tag{18}$$

Прямоугольные экваториальные координаты спутника $x$, $y$, $z$ зависят от угловых переменных $\psi$, $\varphi$, $\bar{\Omega}$, которые в свою очередь связаны со временем уравнениями (10)—(13). Вычисление координат $x$, $y$, $z$ значительно упростится, если будут получены формулы, выражающие переменные $\psi$, $\varphi$, $\bar{\Omega}$ как явные функции времени. Выводом таких формул мы и займемся в следующем параграфе.

### Зависимость переменной $\psi$ от времени

Соотношение (10) между $\psi$ и $E$ аналогично уравнению, связывающему истинную и эксцентрическую аномалии в кеплеровском движении. Поэтому, согласно [7], имеем

$$E = \psi + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\bar{\beta}^k}{k} \sin k\psi, \tag{19}$$

где

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\bar{e}}(1 - \sqrt{1 - \bar{e}^2}) = \frac{\bar{e}}{2} + \frac{\bar{e}^3}{8} + \frac{\bar{e}^5}{16} + \frac{5}{128}\bar{e}^7. \tag{20}$$

В рядах по степеням $e$ будем учитывать члены до $e^7$ включительно. Выражая при помощи (15) $\sin E$ как функцию угла $\psi$, уравнение (11) перепишем следующим образом:

$$\psi + 2\sum_{k=1}^{7} (-1)^k \frac{\bar{\beta}^k}{k} \sin k\psi = M + e^* \sum_{k=1}^{6} \bar{C}_k \sin k\psi + \lambda\psi -$$

$$- \lambda_1 \sin\psi - \bar{\lambda}_1 \cos\bar{\varphi} - \bar{\lambda}_3 \cos 3\bar{\varphi} - \bar{\lambda}_2 \sin 2\bar{\varphi}, \tag{21}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\bar{C}_1 = 1 - \bar{\beta}^2 + \frac{29}{360}\bar{\beta}^6,$$

$$\bar{C}_2 = -\bar{\beta} + \bar{\beta}^3, \quad \bar{C}_3 = \bar{\beta}^2 - \bar{\beta}^4 - \frac{1}{120}\bar{\beta}^6,$$

$$\bar{C}_4 = -\bar{\beta}^3 + \bar{\beta}^5, \quad \bar{C}_5 = \bar{\beta}^4 - \bar{\beta}^6; \quad \bar{C}_6 = -\bar{\beta}^5.$$

Величину $\bar{\beta}$ можно представить в виде ряда по степеням $e$, если воспользоваться формулами (20) и (15). В уравнении (21) коэффициенты при переменных $\psi$ и $\bar{\varphi}$ зависят от $e$, $s$, $\varepsilon^2$ и $\sigma$, причем можно выделить члены, зависящие только от $e$ и $s$, и члены с множителем $\varepsilon^2$. После такого разделения уравнение (21) запишется в виде

$$\psi = M(1 + \lambda) + e\sum_{k} f_k \sin k\psi + \varepsilon^2 \Phi(\psi), \tag{22}$$

где

$$\Phi(\psi) = a_1 \cos\bar{\varphi} + a_2 \cos 3\bar{\varphi} + a_3 \sin 2\bar{\varphi} + \sum_{k=1}^{4} f_k^* \sin k\psi; \tag{23}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon\sigma s(4 - 5s^2),$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\varepsilon\sigma s^3; \quad a_3 = \frac{1}{4}s^2(1 - e^2)^{3/2},$$

$$f_1^* = -es^2 + \frac{e^2}{4}(2 + s^2) + \frac{3}{8}e\varepsilon^2 s^4,$$

$$f_2^* = -\frac{e^2}{2}(1 - 3s^2)(1 - e^2),$$

$$f_3^* = \frac{e^3}{4}(2 - 5s^2); \quad f_4^* = -\frac{e^4}{8}(3 - 7s^2).$$

При $\varepsilon = 0$ переменная $\psi$ обращается в истинную аномалию, и уравнение (22) переходит в уравнение центра:

$$\psi_0 = M(1 + \lambda) + \sum_{k=1}^{7} f_k^0 \sin kM, \tag{24}$$

где коэффициенты $f_k^0$ — известные ряды по степеням эксцентриситета. Поскольку при $\varepsilon = 0$ $\psi = \psi_0$, уравнение (22) запишем так:

$$\psi - \Psi_0 - \varepsilon^2 \Phi(\psi) = 0. \tag{25}$$

Рассматривая (25) как уравнение Лагранжа, можно искать, согласно [8], корень этого уравнения в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon^2$

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon^2)^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\Psi_0^{k-1}} [\Phi^{(k)}(\Psi_0)]. \tag{26}$$

Соотношение (24), подставленное в уравнение (26), дает возможность получить переменную $\psi$ как функцию $M$.

Введем вместо элементов $M$, $\omega_0$, $\Omega_0$, фигурировавших в уравнениях (8)—(13), новые элементы $l$, $h$, $g$ или $\bar{g}$, связанные со старыми следующим образом:

$$\begin{aligned} l &= M(1+\lambda) = n_0(t-t_0) + l_0, \\ g &= \nu l + \omega_0 = n_1(t-t_0) + g_0, \\ h &= \mu l + \Omega_0 = n_2(t-t_0) + h_0, \\ \bar{g} &= g - \frac{\pi}{2} = n_1(t-t_0) + \bar{g}_0, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$l_0 = M_0(1+\lambda), \quad g_0 = \nu l_0 + \omega_0, \quad h_0 = \mu l_0 + h_0,$$

$$\bar{g}_0 = g_0 - \frac{\pi}{2}; \quad n_1 = \nu n_0; \quad n_2 = \mu n_0,$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}} \left\{1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) + \frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)(1-11s^2)\right\},$$

а $\mu$, $\nu$, $\lambda$ даются формулами (16)—(18).

Если провести такую замену в уравнении (26), окончательно получим:

$$\psi = l + \sum K_{kj} \sin(kl + j\bar{g}). \tag{28}$$

$$K_{10} = e\left[2 - \varepsilon^2 s^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^4 s^4\right] - \frac{e^3}{8}[2 - 3\varepsilon^2(4-5s^2)] + \frac{5}{96}e^5 + \frac{407}{4608}e^7,$$

$$K_{20} = \frac{e^2}{4}[5 - 2\varepsilon^2(1-s^2)] - \frac{e^4}{24}[11 - 4\varepsilon^2(9-14s^2)] + \frac{17}{192}e^6,$$

$$K_{30} = \frac{e^3}{24}[26 - 3\varepsilon^2(4-5s^2)] - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7,$$

$$K_{40} = \frac{e^4}{96}[103 - 16\varepsilon^2(3-4s^2)] - \frac{451}{480}e^6,$$

$$K_{50} = \frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7,$$

$$K_{60} = \frac{1223}{960}e^6, \qquad K_{70} = \frac{47273}{32256}e^7.$$

Остальные коэффициенты $K_{kj}$ для $j \neq 0$ представлены в виде табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты $K_{kj}$

| $k \backslash j$ | 1 | 2 | −2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s e(4-5s^2)$ | $-\frac{1}{16}\varepsilon^2 s^2 e^2(3-4e^2)$ | — | — | — |
| 1 | $\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s(4-5s^2)$ | $\frac{1}{16}\varepsilon^2 s^2 e(8-19e^2)$ | $\frac{1}{48}\varepsilon^2 s^2 e^3$ | — | — |
| 2 | $\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s e(4-5s^2)$ | $-\frac{1}{64}\varepsilon^2 s^2(16-88e^2+157e^4)$ | $\frac{1}{96}\varepsilon^2 s^2 e^4$ | $-\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s^3 e$ | — |
| 3 | — | $-\frac{1}{16}\varepsilon^2 s^2 e(8-39e^2)$ | — | $\frac{1}{6}\varepsilon^3\sigma s^3$ | — |
| 4 | — | $-\frac{1}{48}\varepsilon^2 s^2 e(39-188e^2)$ | — | $\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s^3 e$ | $-\frac{1}{16}\varepsilon^4 s^4$ |
| 5 | — | $-\frac{59}{48}\varepsilon^2 s^2 e^3$ | — | — | — |
| 6 | — | $-\frac{115}{64}\varepsilon^2 s^2 e^4$ | — | — | — |

## Вывод формул для $\varphi$ и $\overline{\Omega}$

Подставляя в уравнения (8), (9) и (13) вместо $\psi$ уже найденное выражение (28), приходим окончательно к следующим формулам:

$$\varphi = l + \overline{g} + \frac{\pi}{2} + \sum L_{kj}\sin(kl + j\overline{g}), \tag{29}$$

$$\overline{\Omega} = h + \sum M_{kj}\sin(kl + j\overline{g}), \tag{30}$$

где

$$L_{10} = \frac{e}{32}[64 + 16\varepsilon^2(12-17s^2) + 3\varepsilon^4(96-464s^2+385s^4) +$$

$$+ 48\varepsilon^2\sigma^2(4-5s^2)] - \frac{e^3}{16}[4-\varepsilon^2(12-11s^2)] + \frac{5}{96}e^5 + \frac{407}{4608}e^7,$$

$$L_{20} = \frac{e^2}{16}[20 + \varepsilon^2(52-69s^2)] - \frac{e^4}{96}[44-\varepsilon^2(12-11s^2)] + \frac{17}{192}e^6,$$

$$L_{30} = \frac{e^3}{48}[52 + 3\varepsilon^2(44-59s^2)] - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7,$$

$$L_{40} = \frac{e^4}{384}[412 + \varepsilon^2(1044 - 1445s^2)] - \frac{451}{480}e^6,$$

$$L_{50} = \frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7,$$

$$L_{60} = \frac{1223}{960}e^6, \qquad L_{70} = \frac{47273}{32256}e_7,$$

а коэффициенты $L_{kj}$ для $j \neq 0$ и коэффициенты $M_{kj}$ представлены в виде табл. 2 и 3.

Таблица 2

**Коэффициенты $L_{kj}$**

| $k \backslash j$ | 1 | 2 | −2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma es(4-5s^2)$ | $-\frac{3}{64}\varepsilon^2 s^2 e^2(6-7e^2)$ | — | — | — |
| 1 | $\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s(4-5s^2)$ | $\frac{1}{32}\varepsilon^2 s^2 e[24-53e^2+4\varepsilon^2(4-7s^2)+8\sigma^2]$ | $\frac{1}{32}\varepsilon^2 s^2 e^3$ | — | — |
| 2 | $\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma se(4-5s^2)$ | $-\frac{1}{128}\varepsilon^2 s^2[48-256e^2+433e^4+8\varepsilon^2(4-7s^2)+16\sigma^2]$ | $\frac{1}{64}\varepsilon^2 s^2 e^4$ | $-\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma es^3$ | — |
| 3 | — | $-\frac{1}{32}\varepsilon^2 s^2 e[24-113e^2+4\varepsilon^2(4-7s^2)+8\sigma^2]$ | — | $\frac{1}{6}\varepsilon^3\sigma s^3$ | — |
| 4 | — | $-\frac{3}{64}\varepsilon^2 s^2 e^2(26-121e^2)$ | — | $\frac{1}{2}\varepsilon^3\sigma s^3 e$ | $-\frac{1}{16}\varepsilon^4 s^4$ |
| 5 | — | $-\frac{59}{32}\varepsilon^2 s^2 e^3$ | — | — | — |
| 6 | — | $-\frac{345}{128}\varepsilon^2 s^2 e^4$ | — | — | — |

## Приложение к Фобосу и Деймосу

Так как величина $\varepsilon^2$ мала, то для вычисления коэффициентов в формулах (28)—(30) начальные значения элементов Фобоса и Деймоса можно взять из работы [3]. Элементы приведены для начальной эпохи 1880,0.

Таблица 3

Коэффициенты $M_{kj}$

| $k \backslash j$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | — | $\varepsilon^3 \sigma s e \cos i$ | — |
| 1 | $-\frac{1}{8}\varepsilon^2 e \cos i\,[40 - 21e^2 + \varepsilon^2(26 - 119s^2) + 24\sigma^2]$ | $-\varepsilon^3 \sigma s \cos i$ | $\frac{1}{16}\varepsilon^4 s^2 e \cos i$ |
| 2 | $-\frac{1}{48}\varepsilon^2 e^2 \cos i\,(198 - 193e^2)$ | $-\varepsilon^3 \sigma s e \cos i$ | $-\frac{1}{16}\varepsilon^4 s^2 \cos i$ |
| 3 | $-\frac{35}{8}\varepsilon^2 e^3 \cos i$ | — | $-\frac{1}{16}\varepsilon^4 s^2 e \cos i$ |
| 4 | $-\frac{977}{192}\varepsilon^2 e^4 \cos i$ | — | — |

| Фобос | Деймос |
|---|---|
| $a = 9383{,}69$ *км* | $a = 23479{,}57$ *км* |
| $e = 0{,}0217$ | $e = 0{,}0031$ |
| $i = 0°53'27'',0$ | $i = 1°45'25'',0$ |

Если принять для Марса $m = \frac{1}{3093500} m_{\odot}$, $I_2 = -0{,}0020$, $R_0 = 3360{,}0$ *км*, то $\varepsilon_Ф = 0{,}016022$, $\varepsilon_D = 0{,}00639978$, где $\varepsilon_Ф$ и $\varepsilon_D$ — значения параметра $\varepsilon$ соответственно для Фобоса и Деймоса, а масса Марса выражена в массах Солнца. После вычисления приходим к следующим формулам:

для Фобоса

$$\psi = 862272'',08 + 2812'',34\,t + 8951'',36 \sin(2812'',34\,t + 862272'') + 121'',38 \sin 2(2812'',34\,t + 862272'') + 2'',28 \sin 3(2812'',34t + 862272),$$

$$\varphi = 717272'',72 + 2814'',51\,t + 8958'',27 \sin(2812'',34\,t + 862272'') + 121,''49 \sin 2(2812'',34t + 862282'') + 2'',28 \sin 3(2812'',34t + 862227''),$$

$$\overline{\Omega} = 638859'',75 - 1'',08t - 5'',74 \sin(2812'',34\,t + 862272'') - 0'',10 \sin 2(2812'',34\,t - 862272'');$$

для Деймоса получаем

$$\psi = 8856'',0 + 710'',55t + 1279'',0 \sin(710'',55\,t + 8856'') + 2'',48 \sin 2(710'',55\,t + 8856'',0),$$

$$\varphi = 94581'',08 + 711'',64\,t + 1279'',00 \sin(710'',55\,t + 8856'',0) + \\ + 2'',48 \sin 2(710'',55\,t + 8856'',0),$$

$$\bar{\Omega} = 559774'',42 - 0'',043\,t - 0'',127 \sin(710'',55\,t + 8856'',0).$$

Здесь время $t$ нужно брать в минутах.

Предлагаемая в этой работе промежуточная орбита для спутников Марса учитывает основные возмущения, связанные со второй и третьей зональными гармониками потенциала Марса. Элементы $a$, $e$, $i$ будут постоянными, а элементы $l$, $\bar{g}$, $h$ связаны со временем соотношениями (27).

На примере спутников Фобоса и Деймоса можно убедиться, в какой мере выбранная нами промежуточная орбита описывает вековые возмущения в элементе $h$, обусловленные сжатием Марса. В работе [3] приводятся годичные изменения элемента $h$, определенные Г. Струве, из наблюдений спутников Марса.

Наблюдения дают

$$\begin{aligned} \delta h_{\text{Ф}}^{(\text{н})} &= -158^\circ,4841, \\ \delta h_{\text{Д}}^{(\text{н})} &= -\quad 6^\circ,2795. \end{aligned} \tag{31}$$

Те же изменения элемента $h$, вычисленные по формулам (17) и (27), равны

$$\begin{aligned} \delta h_{\text{Ф}}^{(\text{в})} &= -158^\circ,5122, \\ \delta h_{\text{Д}}^{(\text{в})} &= -\quad 6^\circ,3871. \end{aligned} \tag{32}$$

Из сравнения (31) и (32) можно сделать вывод, что промежуточная орбита, основанная на решении обобщенной задачи двух неподвижных центров, дает хорошее представление о реальном движении спутников в поле притяжения Марса. С другой стороны, близость (31) и (32) указывает на то, что изменение элемента $h$ обусловлено главным образом существованием сжатия планеты.

Автор выражает благодарность Е. П. Аксенову за полезные советы и указания при подготовке настоящей работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 6, 1967.
2. Struve H. Beobachtungen der Marstrabanten in Washington, Pulkowa und Lickobservatory S. Pb., 1898.
3. Косачевский М. П. Определение промежуточных орбит спутников Марса. «Тр. ГАИШ», 28, 1960.
4. Косачевский М. П. Возмущающее действие Солнца на движение спутников Марса. «Тр. ГАИШ», 28, 1960.
5. Косачевский М. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 4, 1958.
6. «Планеты и спутники». Сборник статей под ред. Койпера. М., ИЛ, 1957.
7. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., ИЛ, 1964.
8. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
28. 6 1967 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии