Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1968

УДК 621.372.061.3

А. А. БЕЛОВ

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМИ ПОТЕРЯМИ

Приводится описание способа использования асимптотических методов для анализа нелинейных систем с малыми потерями. Приводится пример расчета с использованием указанного приема.

Применение асимптотических методов [1] для анализа нелинейных систем ограничивается областью малых значений диссипативных и нелинейных членов; кроме того, наблюдаются трудности практического расчета достаточно большого числа приближений. Однако если исследуемая система описывается уравнением, в котором диссипативные члены много меньше нелинейных, то расчеты высших приближений можно существенно упростить.

Пусть уровень потерь в системе определяется малым параметром $\varepsilon_1 \ll 1$, а величина реактивной нелинейности характеризуется параметром $\varepsilon_2$. Порядок членов в $n$-м приближении будет определяться величинами $\varepsilon_1^n$; $\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l$, где $k+l=n$, $\varepsilon_2^n$. Если $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$, то членами порядка $\varepsilon_1^n$ и $\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l$ в приближениях выше первого можно пренебречь вплоть до $m$-го приближения, в котором учет реактивной нелинейности приводит к появлению членов, имеющих тот же порядок малости $\varepsilon_2^m$, что и $\varepsilon_1$. Отбрасывание членов порядка $\varepsilon_1^n$ в высших приближениях приводит к существенному упрощению выкладок и дает возможность сравнительно просто находить не только первые два-три, но и более высокие приближения.

Найдем с помощью описанной процедуры вынужденные колебания в резонансном контуре с емкостью запертого $p$—$n$-перехода. Будем считать, что $p$—$n$-переход резкий, а частота внешней силы близка к собственной частоте контура. Решение этой задачи представляет физический интерес и имеет прикладное значение. Оно позволяет определить коэффициенты Фурье обратной емкости (эластанса) $p$—$n$-перехода в схемах с резонансной цепью накачки. Эти коэффициенты, имеющие большое значение для практического расчета параметрических устройств, определены для гармонического тока (и напряжения) накачки [2]. В схемах же с резонансной цепью накачки ни ток ни напряжение не могут быть гармоническими. Пусть $L$ — индуктивность контура накачки, $R$ — сопротивление его потерь, а $u$ и $Q$ — напряжение и заряд на нелинейном конденсаторе. Тогда уравнение движения имеет вид

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + u = E_0 \cos \nu t. \tag{1}$$

Здесь $E_0 \cos \nu t$ — внешняя сила (напряжение генератора накачки). Интегрируя соотношение для дифференциальной емкости $p$—$n$-перехода и выражая напряжение на $p$—$n$-переходе через заряд на нем, получим

$$\frac{1}{c_g} = \frac{2c_0\varphi - Q}{2c_0^2\varphi}; \quad \varphi - u = \frac{(2c_0\varphi - Q)^2}{4c_0^2\varphi}. \tag{2}$$

Здесь $c_g$ — дифференциальная емкость $p$—$n$-перехода в рабочей точке, $c_0$ — дифференциальная емкость $p$—$n$-перехода при $u=0$, $\varphi$ — контактный потенциал на $p$—$n$-переходе. В рабочем режиме заряд состоит из переменной и постоянной составляющих, причем постоянная составляющая заряда вызвана напряжением смещения и, кроме того, при наличии колебаний в контуре может появиться за счет нелинейности. Но, в соответствии с общей теоремой, доказанной в [3], постоянная составляющая напряжения на запертом $p$—$n$-переходе не должна отличаться по величине от напряжения смещения. Вследствие этого, следуя [4], в общем случае необходимо допустить, что на нелинейном конденсаторе имеется некоторый дополнительный постоянный заряд $Q_n$, величина которого определяется из условия постоянства напряжения смещения. Используя соотношение (2), это условие можно записать в виде

$$\varphi - u_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{(2c_0\varphi - \widetilde{Q} - Q_n - Q_x)^2}{4c_0^2\varphi}\,dt. \tag{3}$$

Здесь $T$ — период вынужденных колебаний, $\widetilde{Q}$ — решение уравнения (1) для заряда на нелинейном конденсаторе, $Q_x$ — заряд на нелинейном конденсаторе, вызванный напряжением смещения в холодной системе. Представляя $\widetilde{Q}$ в виде

$$\widetilde{Q} = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m \cos(m\nu t + \varphi_m),$$

для заряда $Q_n$ с помощью соотношения (3) получим

$$Q_n = (2c_0\varphi - Q_x)\left(1 - \frac{Q_0}{2c_0\varphi - Q_x} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_m^2}{(2c_0\varphi - Q_x)^2}}\right). \tag{4}$$

Используя соотношение (2) и переходя к безразмерной переменной $x = \frac{\widetilde{Q}}{2c_0\varphi - Q_x}$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon\{f(\nu t, x, \dot{x}) - \Delta x\}, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \omega_0^2(1 - x_n) - \nu^2, \tag{6}$$

$$x_n = \frac{Q_n}{2c_0\varphi - Q_x}, \tag{7}$$

$\omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{Lc_d}}$; $c_d = \frac{2c_0^2\varphi}{2c_0\varphi - Qx}$ — дифференциальная емкость $p$—$n$-перехода в холодной системе,

$$\varepsilon f(\nu t, x, \dot{x}) = \varepsilon_1 (\omega_0^2 p_0 \cos \nu t - 2\delta\dot{x}) + \varepsilon_2 \frac{\omega_0^2 x^2}{2},$$

$$p_0 = \frac{E_0}{2(\varphi - u_0)} \text{ и } \delta = \frac{R}{2L}.$$

Здесь и в дальнейшем $\varepsilon$ служит обобщенным параметром для обозначения порядка малости соответствующих членов.

Решение уравнения (5) будем, как обычно [1], искать в виде

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1 (a, \nu t, \psi) + \varepsilon^2 u_2 (a, \nu t, \psi) + \ldots$$

где $\psi = \nu t + \vartheta$, причем амплитуда $a$ и фаза $\vartheta$ определяются как решения дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1 (a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2 (a, \vartheta) + \ldots \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon B_1 (a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2 (a, \vartheta) + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

В соответствии с этим в первом приближении

$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi, \\ \varepsilon A_1 &= \varepsilon_1 \left( -\delta a - \frac{\omega_0^2 p_0}{2\nu} \sin \vartheta \right), \\ \varepsilon B_1 &= \varepsilon_1 \left( \frac{\Delta}{2\nu} - \frac{\omega_0^2 p_0}{2a\nu} \cos \vartheta \right), \end{aligned} \tag{9}$$

причем учет заряда $Q_n$ в соответствии с уравнениями (4, 6, 7) приводит к тому, что собственная частота системы $\omega_e$ уже в первом приближении оказывается функцией амплитуды

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}.$$

Переходя ко второму приближению и пользуясь обычной методикой [1], найдем поправку к решению

$$\varepsilon u_1 = \varepsilon_2 \left( \frac{\omega_0^2 a^2}{4\nu^2} - \frac{\omega_0^2 a^2}{12\nu^2} \cos 2\psi \right)$$

и выражения для коэффициентов $A_2$ и $B_2$. Оставляя в последних лишь члены порядка $\varepsilon_2^2$, получим упрощенные формулы

$$\varepsilon^2 A_2 = 0, \quad \varepsilon^2 B_2 = -\varepsilon_2^2 \frac{5\omega_0 4a^2}{48\nu^3}. \tag{10}$$

Точно так же, отбрасывая при определении $u_2$ члены, порядок которых определяется затуханием, найдем

$$\varepsilon^2 u_2 = \varepsilon_2^2 \frac{\omega_0^4 a^3}{192\nu^4} \cos 3\psi.$$

Переходя к определению коэффициентов $A_3$ и $B_3$, а также поправки $u_3$ к решению в четвертом приближении, получим сначала соответствующие нашей задаче уравнения в общем виде. Для этого воспользуемся методикой построения асимптотических решений, изложенной в [1], и отбросим члены, порядок малости которых определяется затуханием. В результате для определения $A_3$, $B_3$ и $u_3$ получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \nu^2 u_3 = f_2(a, \nu t, \psi) + 2\nu A_3 \sin\psi + 2\nu a B_3 \cos\psi,$$

где

$$f_2(a, \nu t, \psi) = u_2 \frac{\partial f(a, \nu t, \psi)}{\partial x} + u_1^2 \frac{\partial^2 f(a, \nu t, \psi)}{\partial x^2} - 2B_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \vartheta \partial t}.$$

Отсюда, удерживая лишь члены порядка $\varepsilon_2^2$, получим

$$A_3 = 0; \quad B_3 = 0, \tag{11}$$

а для поправки к решению в четвертом приближении найдем

$$\varepsilon^3 u_3 = \varepsilon_2^3 \left( \frac{19}{288} \frac{\omega_0^6 a^4}{\nu^6} - \frac{35}{3456} \frac{\omega_0^6 a^4}{\nu^6} \cos 2\psi - \frac{31}{17\,280} \frac{\omega_0^6 a^4}{\nu^6} \cos 4\psi \right).$$

Аналогично получим коэффициенты $A_4$ и $B_4$

$$A_4 = 0, \quad B_4 = -\frac{493}{13\,824} \frac{\omega_0^8 a^4}{\nu^7} \tag{12}$$

и найдем поправку к решению в пятом приближении

$$u_4 = \frac{907}{552\,960} \frac{\omega_0^8 a^5}{\nu^8} \cos 3\psi + \frac{23}{414\,720} \frac{\omega_0^8 a^5}{\nu^8} \cos 5\psi.$$

Подставляя соотношения (9, 10, 11, 12) в уравнения (8), найдем резонансную частоту контура $\omega_e^2$. С достаточной для практики точностью она равна

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 z \left( 1 + \frac{1}{24} \frac{a^2}{z^2} + \frac{49}{6912} \frac{a^4}{z^4} \right),$$

где $z = \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$. Используя это выражение, решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x = z \left[ 1 + \frac{a}{z} \cos\psi - \left( \frac{1}{12} \frac{a_2}{z^2} + \frac{23}{3456} \frac{a^4}{z^4} \right) \cos 2\psi + \right.$$
$$+ \left( \frac{1}{192} \frac{a^3}{z^3} + \frac{547}{552\,960} \frac{a^5}{z^5} \right) \cos 3\psi +$$
$$\left. + \frac{31}{17\,280} \frac{a^4}{z^4} \cos 4\psi + \frac{23}{414\,720} \frac{a^5}{z^5} \cos 5\psi \right]. \tag{13}$$

Здесь в постоянной составляющей решения учитывается и заряд $Q_n$. Подставляя это решение в соотношение (2), можно найти спектр обратной емкости резкого $p$—$n$-перехода в схемах с резонансной цепью накачки. Амплитуды частотных компонентов этого спектра будут равны амплитудам соответствующих гармоник в выражении (13), умноженным на $\frac{1}{c_d}$.

Заметим, что описанный прием можно использовать и для решения нелинейных уравнений, содержащих несколько нелинейных членов, существенно различающихся по величине. При этом диссипативный член в зависимости от его величины может быть объединен с одним из нелинейных членов или выделен особо.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. В. Мигулину и М. Д. Карасеву за помощь в работе и полезные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Белов А. А., Карасев М. Д. «Вопросы радиоэлектроники», техника телевидения, вып. 7, 130—135, 1965.
3. Карасев М. Д. «Успехи физических наук», **69**, вып. 2, 217—267, 1959.
4. Мигулин В. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрон., № 1, 32—37, 1963.

Поступила в редакцию
3.7 1967 г.

Кафедра
физики колебаний