

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3—1968

УДК 539.3 : 533.65

Л. Н. БИРИЧ, В. П. КАНДИДОВ

## ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Рассматривается методика применения АВМ для исследования колебаний пластин на основе метода конечных разностей. Излагается возможное улучшение конечно-разностной схемы непрерывной пластины путем более точного отображения ее инерционных свойств. На основе обычной и улучшенной конечно-разностных схем построена электронная модель колеблющейся пластины.

Для решения задачи о собственных колебаниях пластины применяются различные приближенные методы. Наиболее простым из них, в то же время универсальным, является метод конечных разностей (к. р.). В результате использования этого метода уравнение в частных производных, которым описываются колебания непрерывной пластины, замещается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для обеспечения достаточной точности такого приближения шаг к. р. сетки выбирается достаточно мелким, что приводит к значительному увеличению порядка системы. Анализ получаемой системы уравнений возможен, как правило, только с помощью современных вычислительных машин, в частности АВМ. Методика использования пассивных электрических моделей для изучения собственных колебаний двумерных систем изложена в работах [1], [2]. В дальнейшем она нашла широкое применение для практического решения динамики различных упругих конструкций [3].

В настоящей работе рассматривается возможность применения электронного моделирования для изучения колебаний непрерывных пластин на основе к. р. приближения. Так как повышение точности такого приближения путем уменьшения шага сетки увеличивает объем оборудования ЭМУ, предлагается возможный способ улучшения к. р. схемы. Улучшение к. р. схемы достигается за счет более точного отображения инерционных свойств непрерывной пластины. В работе приводится сравнение обычной и улучшенной к. р. схем на примере собственных колебаний однородных пластин.

Уравнение собственных колебаний ортотропной пластины в прямоугольных координатах имеет вид [4]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где

$$M_x = -D_1(x, y) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right),$$

изгибающий момент в плоскости  $XOZ$ ,  $M_y = -D_2(x, y) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)$  — изгибающий момент в плоскости  $YOZ$ ,  $M_{xy} = -2D_k(x, y) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$  — перекручивающий момент,  $\omega(x, y, t)$  — смещение,  $\rho(x, y)$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_k$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  — параметры пластины.

Для перехода к уравнениям в конечных разностях наложим на пластину квадратную сетку постоянного шага  $\Delta x = \Delta y = \lambda$  (рис. 1). Все параметры пластины считаются заданными только в узлах сетки, т. е. заданы  $D_{1ik}$ ,  $D_{2ik}$ ,  $\rho_{ik}$ ,  $\omega_{ik}(t)$ , где  $i = 0, 1 \dots J$ ,  $k = 0, 1 \dots K$ . Производные в некотором узле  $ik$  заменяются соответствующими конечными разностями:

$$\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x} \rightarrow \frac{\Delta_x \omega_{ik}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (\omega_{i+1/2, k} - \omega_{i-1/2, k}),$$

$$\frac{\partial^2 \omega_{ik}}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\Delta_x^2 \omega_{ik}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (\omega_{i+1, k} - 2\omega_{ik} + \omega_{i-1, k}) \text{ и т. д.}$$

Уравнение (1), описывающее систему с бесконечным числом степеней свободы, переходит в систему конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений

$$[\Delta_x^2 M_x(t) + 2F(t) + \Delta_y^2 M_y(t)]_{ik} = m_{ik} \frac{d^2 \omega_{ik}(t)}{dt^2}, \quad (2)$$

где  $i = 0, 1 \dots J$ ,  $k = 0, 1 \dots K$ ,  $F = \Delta_{xy}^2 \bar{M}_{xy}$  — перекручивающая сила,  $m_{ik} = \rho_{ik} \lambda^2$  — сосредоточенная масса.

В конечных разностях моменты  $M_{xik}$ ,  $M_{yik}$  и сила  $F_{ik}$  имеют вид линейных форм от смещений узлов, ближайших к точке  $ik$ .

Сформулируем в к. р. форме граничные условия для случая, когда отрезки контура пластины параллельны осям координат.

1. Для свободно опертого края, например  $OY$ , они имеют вид

$$\omega_{0k}(t) = 0; \quad M_{x_{0k}}(t) = 0, \quad (k = 0, 1 \dots K);$$

2. Для жесткого закрепления края  $OY$ :

$$\omega_{0k}(t) = 0, \quad \omega_{-1, k} = \omega_{1k}, \quad (k = 0, 1 \dots K);$$

3. В случае свободного края  $OY$  граничные условия для непрерывной пластины имеют вид

$$M_x = 0; \quad \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{1, x=0} = 0. \quad (3)$$

Первое условие, записанное в конечных разностях, позволяет определить смещение законтурной точки  $\omega_{-1k}$

$$\omega_{-1k}(t) = 2(1 + \nu_2) \omega_{0k} - \omega_{1k} + \nu_2 (\omega_{0k-1} + \omega_{0k+1}).$$

Смещение этой точки входит в выражение для момента  $M_{y_{0k}}(t)$ . Второе условие заменяем более жестким, полагая равными нулю каждое из слагаемых в (3). Тогда

$$M_{x_{1k}} = M_{x_{-1k}}, \quad (4) \quad \Delta_y^2 \omega_{1k} = \Delta_y^2 \omega_{-1k}. \quad (4')$$

Равенство (4') позволяет найти перекручивающую силу  $F_{0k}$  в точке, лежащей на свободном краю. В случае однородной изотропной пластины, запишем

$$F_{0k} = 4 \frac{Dk}{\Delta x^2 \Delta y^2} (\Delta_y^2 \omega_{1k} - \Delta_x^2 \omega_{0k}). \quad (5)$$

4. В случае свободного угла  $ik$  граничные условия получаются аналогично условиям для свободного края. Они имеют вид

$$\begin{aligned} M_{x_{ik}} &= 0, & M_{y_{ik}} &= 0, \\ M_{x_{i-1k}} &= M_{x_{i+1k}}, & M_{y_{i-1k}} &= M_{y_{i+1k}}, \\ F_{ik} &= 8 \frac{Dk}{\Delta x^2 \Delta y^2} (\omega_{ik} + \omega_{i+1k-1} - \omega_{i+1k} - \omega_{ik-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Величина массы в граничных точках зависит от конкретной сетки разбиения. Для однородной пластины с сеткой, изображенной на рис. 1, масса точек свободного края равна половине, а масса угловой точки — четверти массы внутренней.

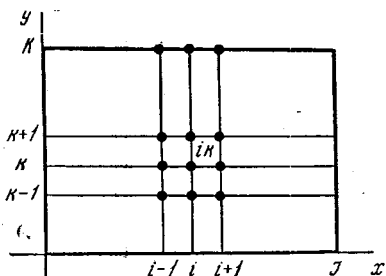


Рис. 1

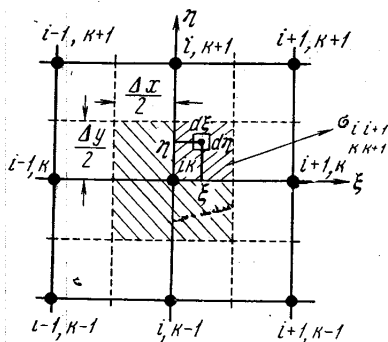


Рис. 2

Сформулированные краевые условия эквивалентны условиям, полученным в работе [5] вариационным методом для к. р. сетки.

Система уравнений (1) совместно с соответствующими краевыми условиями (4), (5), (6) описывает колебания дискретной упруго-массовой модели, которой заменяется непрерывная пластина при обычном к. р. переходе.

Сила инерции точечной массы  $m_{ik}$  к. р. модели существенно отличается от результирующей силы инерции, возникающей при действительных деформациях элемента  $\sigma_{ik} = \Delta x \Delta y$  непрерывной пластины. Чтобы приблизить инерционные свойства к. р. модели к свойствам непрерывной пластины, силу инерции элемента  $\sigma_{ik}$  можно вычислить по приближенной форме его прогиба. Для получения приближенной формы прогиба элемента воспользуемся линейной аппроксимацией.

Рассмотрим элемент  $\sigma_{ik}$  (рис. 2). Он состоит из четырех подэлементов, т. е.

$$\sigma_{ik} = \sigma_{\substack{ii+1 \\ kk+1}} + \sigma_{\substack{ii+1 \\ kk-1}} + \sigma_{\substack{ii-1 \\ kk+1}} + \sigma_{\substack{ii-1 \\ kk-1}}.$$

По формулам линейной интерполяции для формы прогиба  $w(\xi, \eta, t)$  подэлемента  $\sigma_{\substack{ii+1 \\ kk+1}}$  имеем

$$\omega(\xi, \eta, t) = \left(1 - \frac{\xi}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\eta}{\Delta y}\right) \omega_{ik}(t) + \frac{\xi}{\Delta x} \left(1 - \frac{\eta}{\Delta y}\right) \omega_{i+1k}(t) + \\ + \frac{\eta}{\Delta y} \left(1 - \frac{\xi}{\Delta x}\right) \omega_{ik+1}(t) + \frac{\xi\eta}{\Delta x\Delta y} \omega_{i+1k+1}(t), \quad (7)$$

где

$$0 < \xi < \frac{\Delta x}{2}, \quad 0 < \eta < \frac{\Delta y}{2}.$$

Сила инерции при движении бесконечно малого участка  $d\xi d\eta$  будет

$$-dR_{kk+1} = \ddot{\omega}(\xi, \eta, t) \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Суммарную силу инерции  $R_{kk+1}$ , возникающую при динамической деформации подэлемента  $\sigma_{kk+1}$  по форме (7), получим двойным интегрированием

$$-R_{kk+1} = \frac{\Delta x \Delta y}{64} \rho_{ik} [9\ddot{\omega}_{ik} + 3\ddot{\omega}_{i+1,k} + 3\ddot{\omega}_{i,k+1} + \ddot{\omega}_{i+1,k+1}].$$

Здесь для простоты положено  $\rho = \text{const}$ . Сила инерции, вызванная деформацией всего элемента  $\sigma_{ik}$ , будет

$$-R_{ik} = \frac{m_{ik}}{64} [\Delta_{x^2 y^2}^4 \ddot{\omega}_{ik} + 8\Delta_x^2 \ddot{\omega}_{ik} + 8\Delta_y^2 \ddot{\omega}_{ik} + 64\ddot{\omega}_{ik}]. \quad (8)$$

Формула (8) получена для внутреннего угла сетки. При расчете силы инерции для точек края необходимо учитывать число и расположение подэлементов, исходя из конкретной сетки разбиения. Полученное выражение для  $R_{ik}$  является правой частью уравнения (2), т. е.

$$(\Delta_x^2 M_x + 2F + \Delta_y^2 M_y)_{ik} = -R_{ik} \quad (i = 0, 1 \dots J, k = 0, 1 \dots K). \quad (9)$$

Система уравнений (9) с краевыми условиями вида (4), (5) описывает собственные колебания улучшенной к. р. модели пластины.

Чтобы оценить точность аппроксимации колебательных свойств различных к. р. моделей, рассмотрим однородную, изотропную пластину квадратной формы с опертыми краями. При квадратной сетке для такой пластины имеет место  $J=K=N$ .

Собственные частоты пластины с наложенной сеткой выражаются формулой [6]

$$f_{mn} = \Phi_{mn} \frac{1}{2\pi N^2} \sqrt{\frac{D}{\lambda^4 \rho h}}, \quad (10)$$

где  $\Phi_{mn}$  — приведенные частоты, т. е. круговые частоты пластины с единичными параметрами. Для непрерывной пластины приведенные частоты равны [4]

$$\Phi_{mn} = \pi^2 (m^2 + n^2), \quad (11)$$

здесь  $m$  и  $n$  — корни частотного уравнения. Они принимают последовательно значения из натурального ряда.

Приведенные частоты к. р. моделей определяются из систем уравнений (2), (9) и соответствующих краевых условий. Подставив решение в виде

$$\omega_{ik} = \left[ A \sin \frac{i\pi}{N} m \cdot \sin \frac{k\pi}{N} n \right] \cos \omega_{mn} t$$

в системе уравнений (2) и (9), получим

для обычной к. р. модели

$$\Phi'_{mn} = 4N^2 \left( \sin^2 \frac{\pi m}{2N} + \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \right), \quad (12)$$

для улучшенной модели

$$\Phi'_{mn} = \frac{4N^2 \left( \sin^2 \frac{\pi m}{2N} + \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \sin^2 \frac{\pi m}{2N} + \sin^2 \frac{\pi n}{2N} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi m}{2N} \cdot \sin^2 \frac{\pi n}{2N} \right)}}. \quad (13)$$

Числа  $m$  и  $n$  являются корнями частотного уравнения, которое для обеих моделей имеет вид

$$\sin \pi m \cdot \sin \pi n = 0. \quad (14)$$

Полученные выражения (12) и (13) позволяют оценить ошибку в определении частот опертой пластины при замене ее той или иной к. р. моделью.

На рис. 3 нанесены относительные отклонения частот к. р. моделей от частот непрерывной пластины в зависимости от числа шагов  $N$ . Для

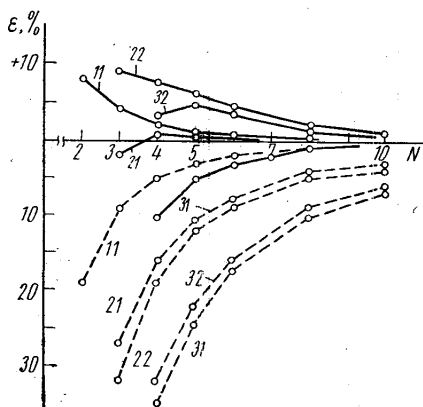


Рис. 3

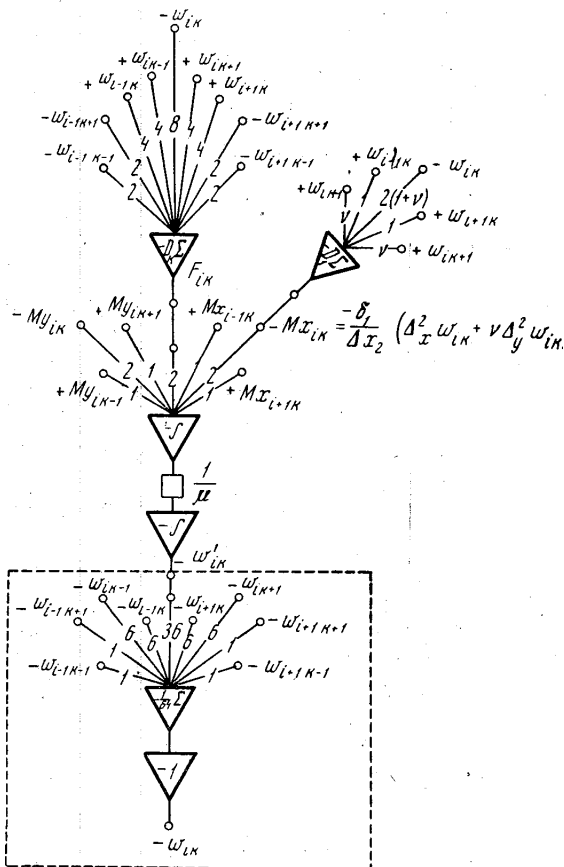


Рис. 4

обычной модели рассчитанные точки соединены отрезками пунктирных линий; для улучшенной — отрезками сплошных линий. Из графиков видно, что для улучшенной к. р. модели относительные отклонения частот меньше, чем для обычной. Повышение точности, достигаемое в улучшенной модели, становится особенно существенным для более сложных форм собственных колебаний типа 31, 32.

Действительно, в обычной к. р. модели сила инерции некоторой массы  $ik$  равна результирующей силе инерции распределенного элемента  $\sigma_{ik}$ , если его форма прогиба совпадает с любой плоскостью, прохо-

дящей через узел  $ik$ . В улучшенной модели результирующая сила инерции в узле определяется для элемента  $\sigma_{ik}$ , у которого форма прогиба находится путем линейной аппроксимации. Поскольку с ростом номеров собственного тона кривизна формы увеличивается, в модели с некоторым числом шагов возрастает ошибка в воспроизведении инерционных свойств. В улучшенной модели это возрастание происходит медленнее. Из приведенных результатов видно, что для получения частот первых трех-четырех тонов опертой однородной пластины с точностью до 5%, достаточно взять улучшенную модель с числом шагов  $6 \times 6$ , т. е. с 25 степенями свободы. Обычная к. р. модель должна иметь  $8 \times 8$  шагов, т. е. 49 степеней свободы.

Для исследования колебаний неоднородных, ортотропных пластин на основе к. р. моделей могут применяться электронные моделирующие установки. Структурная схема электронной модели, собранной согласно системе уравнений (2) и (9), приведена на рис. 4. На выходах сумматоров образуются напряжения, которые пропорциональны изгибающим моментам  $M_x$ ,  $M_y$  и перекручивающей силе  $F$ . Результат двойного интегрирования суммы соответствующих моментов и сил является смещением некоторого узла сетки. В целом структурная схема представляет собой совокупность сильно связанных колебательных колец. Переход к улучшенной модели приводит к наложению на кольца дополнительных связей. На рис. 4 эти связи выделены пунктиром. Среднее число операционных элементов, приходящихся на одну степень свободы, меняется от 3 до 7 в зависимости от конкретной задачи. При использовании улучшенной модели требуется дополнительно два операционных элемента.

Простейшее кольцо состоит из двух интеграторов и сумматора, образующего, например, момент  $M_x$ . Частота такого кольца по входу  $\omega_{ik}$  определяется формулой [7]

$$\theta_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\delta}{\Delta \xi^2} \frac{1}{\mu} (1 + \nu)}, \quad (15)$$

здесь  $\delta$ ,  $\xi$ ,  $\mu$  — машинные параметры, определяющие коэффициенты передачи сумматора и интеграторов.

Машинные параметры являются безразмерными. Они связаны с физическими величинами следующими соотношениями:

$$D = D_0 \delta, \quad m = m_0 \mu, \quad x = l_0 \xi,$$

$$f = f_0 \theta = \frac{1}{t_0} \theta,$$

где  $D_0$ ,  $m_0$ ,  $l_0$ ,  $f_0$ ,  $t_0$  — масштабные множители. Для них имеет место соотношение:

$$\frac{m_0 l_0^2}{D_0 t_0^2} = 1. \quad (16)$$

Если в формуле (10) для собственных частот однородной пластины перейти к машинным переменным, то, учитывая соотношение (16), найдем машинные частоты для той или иной схемы

$$\theta_{mn}^{к.р.} = \Phi_{mn}^{к.р.} \frac{1}{2\pi N^2} \sqrt{\frac{\delta}{\Delta \xi^2 \mu}}$$

Отсюда для приведенных частот к. р. схем получим

$$\Phi_{mn}^{к.р.} = 2N^2 \sqrt{1 + \nu} \frac{\theta_{mn}^{к.р.}}{\theta_k}. \quad (17)$$

Выражение (17) позволяет просто получить приведенные частоты однородных пластин по частотам электронной модели и частотам колец, измеренным непосредственно на АВМ. Это значительно облегчает процесс исследования на АВМ, когда необходимо изменять масштаб времени для повышения точности в определении частот и форм собственных колебаний.

Для проверки и иллюстрации изложенной методики были исследованы на электронной моделирующей установке однородные изотропные пластины, для которых имеются расчетные частоты. Электронная модель собрана на специализированной установке, разработанной на кафедре проф. С. П. Стрелкова физического факультета МГУ [8]. Моделирующая установка работает в звуковом диапазоне частот. Определение частот и форм собственных колебаний производилось резонансным методом [8].

Таблица 1

Номера тона $m, n$	Обычная к. р. схема			Улучшенная к. р. схема		
	приведенная частота $\Phi_{m, n}$		ошибка в %	приведенная частота $\Phi_{m, n}$		ошибка в %
	расчет	модель		расчет	модель	
1,1	18,74	19,10	+1,93	20,27	20,05	-1,3
1,2}	41,36	41,3	-0,14	49,60	49,8	+0,4
2,1}						
2,2	63,99	63,4	-0,92	85,32	86,8	+1,75
3,1}	64,00	64,4	+0,45	88,38	94,0	+5,9
1,3}						
3,2}	86,62	90,0	+3,9	132,2	137,0	+3,6
2,3}						

Таблица 2

Номера тона $m, n$	Частота по Ритцу $\Phi_{m, n}$	Обычная к. р. схема		Улучшенная к. р. схема	
		частота $\Phi_{m, n}$	отклонение в %	частота $\Phi_{m, n}$	отклонение в %
1,0	3,517	3,067	-13	3,15	-10
1,1	14,08	9,15	-35	10,85	-28
2,0	22,0	14,6	-34	17,35	-21
2,1	43,4	27,0	-38	36,6	-16
1,2	57,8	30,0	-48	41,6	-28

Таблица 3

Номера тона $m, n$	Частота по Ритцу $\Phi_{m, n}$	Обычная к. р. схема		Улучшенная к. р. схема	
		частота $\Phi_{m, n}$	отклонение в %	частота $\Phi_{m, n}$	отклонение в %
1,0	3,517	3,24	-8	3,24	-8
1,1	11,16	12,9	+16	12,9	+15
2,0	22,0	18,7	-15	19,8	-10
2,1	36,6	35,8	-2	38,6	+5
1,2	39,7	34,6	-13	40,5	+2

Собранная электронная модель содержала девять степеней свободы. При моделировании на основе обычной к.р. схемы в установке использовалось 45 операционных усилителей, на основе улучшенной схемы — 63.

Точность работы электронной модели была проверена на примере анализа квадратной пластины с опертыми краями, для которой приведенные частоты рассчитываются по формулам (12) и (13). На пластину накладывалась сетка с числом шагов  $4 \times 4$ . В табл. 1 приведены частоты опертой пластины, полученные расчетным путем и измеренные на модели для обеих к.р. схем. Из сравнения приведенных результатов видно, что для первых трех собственных частот ошибка электронной модели не превышает 2%.

В качестве второго примера были рассмотрены собственные колебания консольной пластины прямоугольной формы. Полученные на модели приведенные частоты сравнивались с приближенными значениями, найденными методом Ритца [6]. Первоначально рассматривалась к.р. схема, у которой на границе пластины находятся узлы сетки. Краевые условия для этого случая представлены формулами (4), (5), (6). К.р. схема имела  $2 \times 3$  шагов. Результаты, полученные для такой схемы разбиения, представлены в табл. 2. Применение улучшенной схемы значительно повышает точность определения собственных частот, особенно второго, третьего, четвертого тонов. Значительная ошибка, более 10%, в определении первой собственной частоты объясняется малым числом шагов. Заметим, что при этом числе шагов для к.р. схемы однородной консольной балки ошибка по первому тону более 8%.

Для сравнения было рассмотрено разбиение, при котором крайние узлы лежат на полшага внутри контура пластины. В этом случае краевые условия были несколько изменены. Сетка, наложенная на пластину, имела  $3 \times 3,5$  шага. Результаты исследования приведены в табл. 3. Первые две частоты улучшенной к.р. схемы совпадают с соответствующими частотами обычной схемы, так как кривизна этих собственных форм невелика. В целом точность определения частот консольной пластины для такого разбиения выше, чем для рассмотренного ранее.

Изложенная методика применима для изучения колебаний ортотропных, неоднородных пластин и пластин, подкрепленных балками. Она может использоваться также для исследования колебаний неконсервативных двумерных систем, в частности, динамической устойчивости конструкций в потоке воздуха.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mac Neal R. H. J. Appl. Mech., 18, 1, 59—67, 1951.
2. Brignac W. I., Schwender R. G. Proc. ASCE, 86, EM-3, 1960.
3. Mac Neal R. H. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 88, 3, 1962.
4. Огибалов П. Н. Изгиб, устойчивость и колебания пластин. М., 1958.
5. Вайнберг Д. В. Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом. Соппротивление материалов и теория сооружений, вып. 1. Киев, 1965.
6. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, «Наукова думка», 1964.
7. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959.
8. Дьяченко В. М., Кандидов В. П., Орданович А. Е. Электронная моделирующая установка для исследования колебательных систем высокого порядка. В сб. «Аналоговые методы и средства решения краевых задач». Киев, «Наукова думка», 1964.

Поступила в редакцию  
4.8 1967 г.

Кафедра  
общей физики для мехмата